

高二数学学科寒假作业（复习） Day 5 （练习时长：40 分钟）

姓名：

完成评价：

一、核心知识的归纳总结和梳理模块

知识点 01：定点问题

定点问题是比较常见出题形式，化解这类问题的关键就是引进变的参数表示直线方程、数量积、比例关系等，根据等式的恒成立、数式变换等寻找不受参数影响的量。

【一般策略】

- ①引进参数.一般是点的坐标、直线的斜率、直线的夹角等.
- ②列出关系式.根据题设条件，表示出对应的动态直线或曲线方程.
- ③探究直线过定点.一般化成点斜式 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 或者直线系方程

$$f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$$

知识点 02：定值问题

在解析几何中，有些几何量，如斜率、距离、面积、比值等基本量和动点坐标或动线中的参变量无关，这类问题统称为定值问题。这些问题重点考查学生方程思想、函数思想、转化与化归思想的应用。

【一般策略】

- ①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；
- ②引进变量法：选择适当的动点坐标或动直线中的系数为变量，然后把要证明为定值的量表示成上述变量的函数，最后把得到的函数化简，消去变量得到定值

【常用结论】

结论 1 过圆锥曲线上的任意一点 $P(x_0, y_0)$ 作互相垂直的直线交圆锥曲线于点 A, B ，则直线 AB 必过一定点（等轴双曲线除外）。

结论 2 过圆锥曲线的准线上任意一点 P 作圆锥曲线上的两条切线，切点分别为点 A, B ，则直线 AB 必过焦点。

结论 3 过圆锥曲线外一点 P 作圆锥曲线上的两条切线，切点分别为点 A, B ，则直线 AB 已知且必过定点。

结论 4 过圆锥曲线上的任意一点 $P(x_0, y_0)$ 作斜率和为 0 的两条直线交圆锥

曲线于 A, B 两点，则 k_{AB} 为定值.

结论 5 设点 A, B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上关于原点对称的两点，点 P 是该椭圆上不同于 A, B 两点的任意一点，直线 PA, PB 的斜率分别是 k_1, k_2 ，
则 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$

知识点 03: 空间向量的有关概念定直线问题

定直线问题是指因图形变化或点的移动而产生的动点在定直线上的问题，解决这类问题，一般可以套用求轨迹方程的通用方法，也可以根据其本身特点的独特性采用一些特殊方法.

【一般策略】

- ①联立方程消去参；
- ②挖掘图形的对称性，解出动点横坐标或纵坐标；
- ③将横纵坐标分别用参数表示，再消参；
- ④设点，对方程变形解得定直线.

解题技巧：动点在定直线上：题设为某动点 $P(x_0, y_0)$ 在某定直线.

目标：需要消掉关于动点横坐标或者纵坐标的所有参数，从而建立一个无参的直线方程，此时会分为三种情况：

- (1) $x_0 = a$ ，即动点恒在直线 $x = a$.
- (2) $y_0 = b$ ，即动点恒在直线 $y = b$.
- (3) $y_0 = f(x_0)$ ，即动点恒在直线 $y = f(x)$.

7. 已知抛物线 $y^2 = 4\sqrt{5}x$, F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 抛物线的准线过双曲线的左焦点 F_1 , 与双曲线的渐近线交于点 A , 若 $\angle F_1 F_2 A = \frac{\pi}{4}$,

则双曲线的标准方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{10} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$
C. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

8. 已知 A, F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点和左焦点, 直线 $y = kx$ 与椭圆交于 B, C 两点, 若直线 CF 交线段 AB 于 M 且 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 则椭圆的离心率为

()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

二、多选题

9. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 经过点 $M(1, 2)$, 其焦点为 F , 过点 F 的直线 l 与抛物线交于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 设直线 OA , OB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 ()

- A. $p = 2$ B. $|AB| \geq 4$
C. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$ D. $k_1 k_2 = -4$

10. 已知斜率为 k 的直线交抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两点, 下列说法正确的是 ()

- A. $x_1 x_2$ 为定值 B. 线段 AB 的中点在一条定直线上
C. $\frac{1}{k_{OA}} + \frac{1}{k_{OB}}$ 为定值 D. $\frac{|AF|}{|BF|}$ 为定值 (F 为抛物线的焦点)

11. 双曲线 C 的两个焦点为 F_1, F_2 , 以 C 的实轴为直径的圆记为 D , 过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M, N 两点, 且 $\cos \angle F_1 N F_2 = \frac{3}{5}$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

三、填空题

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$, 则 C 的焦距为_____.

13. 过原点的一条直线与圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = 3$ 相切，交曲线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 于点 P ，若 $|OP| = 8$ ，则 p 的值为_____.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， C 的上顶点为 A ，两个焦点为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点， $|DE| = 6$ ，则 $\triangle ADE$ 的周长是_____.

四、解答题

15. 已知椭圆 C 的对称中心在坐标原点，以坐标轴为对称轴，且经过点 $(\sqrt{3}, 1)$ 和 $(-2, \frac{\sqrt{6}}{3})$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 过点 $M(2, 0)$ 作不与坐标轴平行的直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点，过点 A, B 分别向 x 轴作垂线，垂足分别为点 D, E ，直线 AE 与直线 BD 相交于 P 点.

① 求证：点 P 在定直线上；

② 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.