

高二数学学科寒假作业（复习） Day 3 (练习时长：40 分钟)

姓名： 完成评价：

一、核心知识的归纳总结和梳理模块

知识点 1：椭圆的定义及标准方程

平面上到两定点 F_1, F_2 的距离的和为常数（大于两定点之间的距离）的点 P 的轨迹是椭圆. 这

两个定点叫做椭圆的焦点，两个定点之间的距离叫做椭圆的焦距，记作 $|F_1F_2| = 2c$.

定义式： $|PF_1| + |PF_2| = 2a (2a > |F_1F_2|)$.

要注意，该常数必须大于两定点之间的距离，才能构成椭圆.

标准方程：焦点在 x 轴上， $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ；焦点在 y 轴上， $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

知识点 2：椭圆的图形及其简单几何性质

标准方程	图形	焦点位置	几何性质				
			范围	顶点	焦点	对称性	离心率
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)		在 x 轴上	$ x \leq a$ $ y \leq b$	$(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$	$(\pm c, 0)$	对 称 轴： x 轴， y	$0 < e < 1$, $e = \frac{c}{a}$
$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)		在 y 轴上	$ y \leq a$ $ x \leq b$	$(0, \pm a)$, $(\pm b, 0)$	$(0, \pm c)$	轴， 对 称 中 心： 原点	

注意：求椭圆的标准方程的方法可以采用待定系数法，此时要注意根据焦点的位置选择椭圆的标准方程；也可以利用椭圆的定义及焦点位置或点的坐标确定椭圆的标准方程.

知识点 3：双曲线的定义和标准方程

1. 双曲线的定义

(1) 定义：平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于常数(小于 $|F_1F_2|$ 且大于零)的

点的轨迹叫做双曲线.

这两个定点叫做双曲线的焦点，两个焦点间的距离叫做双曲线的焦距.

(2) 符号语言: $\left| |MF_1| - |MF_2| \right| = 2a, 0 < 2a < |F_1F_2|$.

(3) 当 $|MF_1| - |MF_2| = 2a$ 时，曲线仅表示焦点 F_2 所对应的双曲线的一支；

当 $|MF_1| - |MF_2| = -2a$ 时，曲线仅表示焦点 F_1 所对应的双曲线的一支；

当 $2a = |F_1F_2|$ 时，轨迹为分别以 F_1, F_2 为端点的两条射线；

当 $2a > |F_1F_2|$ 时，动点轨迹不存在.

2. 双曲线的标准方程

双曲线的标准方程有两种形式：

(1) 焦点在 x 轴上的双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)，焦点分别为

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，焦距为 $2c$ ，且 $c^2 = a^2 + b^2$ ，如图 1 所示；

(2) 焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)，焦点分别为 $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ ，焦距为 $2c$ ，且

$c^2 = a^2 + b^2$ ，如图 2 所示.

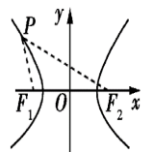


图 1

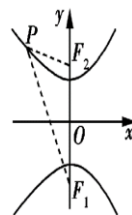


图 2

注：双曲线方程中 a, b 的大小关系是不确定的，但必有 $c > a > 0, c > b > 0$.

3. 必记结论

(1) 焦点到渐近线的距离为 b .

(2) 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 有共同渐近线的双曲线方程可设为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda (a > 0, b > 0, \lambda \neq 0).$$

(3) 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{n}{m}x$ ，则双曲线方程可设为

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = \lambda (m > 0, n > 0, \lambda \neq 0) \text{ 或 } n^2x^2 - m^2y^2 = \lambda (m > 0, n > 0, \lambda \neq 0).$$

(4) 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 共焦点的双曲线方程可设为

$$\frac{x^2}{a^2 - k} - \frac{y^2}{b^2 + k} = 1 (a > 0, b > 0,$$

$-b^2 < k < a^2).$

(5) 过两个已知点的双曲线的标准方程可设为 $mx^2 + ny^2 = 1 (mn < 0).$

(6) 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 有共同焦点的双曲线方程可设为

$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1 (a > b > 0, b^2 < \lambda < a^2).$

知识点 4：双曲线的几何性质

1. 双曲线的几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
图形		
范围	$ x \geq a, y \in \mathbf{R}$	$ y \geq a, x \in \mathbf{R}$
对称性	对称轴：x 轴、y 轴；对称中心：原点	
焦点	左焦点 $F_1(-c, 0)$ ，右焦点 $F_2(c, 0)$	下焦点 $F_1(0, -c)$ ，上焦点 $F_2(0, c)$
顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
轴	线段 A_1A_2 是双曲线的实轴，线段 B_1B_2 是双曲线的虚轴； 实轴长 $ A_1A_2 = 2a$ ，虚轴长 $ B_1B_2 = 2b$	
渐近线	$y = \pm \frac{b}{a} x$	$y = \pm \frac{a}{b} x$
离心率 e	$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} (e > 1)$	

2. 等轴双曲线的概念和性质

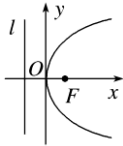
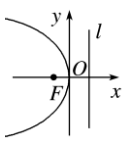
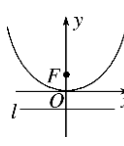
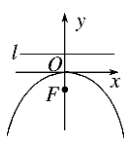
实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线。等轴双曲线具有以下性质：

(1) 方程形式为 $x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$ ；

- (2) 渐近线方程为 $y = \pm x$ ，它们互相垂直，并且平分双曲线实轴和虚轴所成的角；
- (3) 实轴长和虚轴长都等于 $2a$ ，离心率 $e = \sqrt{2}$.

知识点 5：抛物线的标准方程及简单性质

1. 抛物线的标准方程及其简单性质

标准方程	$y^2 = 2px (p > 0)$	$y^2 = -2px (p > 0)$	$x^2 = 2py (p > 0)$	$x^2 = -2py (p > 0)$
图形				
范围	$x \geq 0, y \in \mathbf{R}$	$x \leq 0, y \in \mathbf{R}$	$y \geq 0, x \in \mathbf{R}$	$y \leq 0, x \in \mathbf{R}$
对称轴	<u>x</u> 轴	<u>x</u> 轴	<u>y</u> 轴	<u>y</u> 轴
焦点坐标	$F(\frac{p}{2}, 0)$	$F(-\frac{p}{2}, 0)$	$F(0, \frac{p}{2})$	$F(0, -\frac{p}{2})$
准线方程	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
顶点坐标	$O(0,0)$			
离心率	$e = \underline{1}$			

2. 理解抛物线标准方程

- (1) 特征：等号的一边是某个变量的平方，另一边是另一个变量的一次单项式；
- (2) 焦点的非零坐标是标准方程中一次项系数的 $\frac{1}{4}$ ；
- (3) 准线与坐标轴的交点与焦点关于原点对称；
- (4) 方程中一次项的变量与焦点所在坐标轴名称相同，其系数符号决定抛物线的开口方向；
- (5) 只有抛物线的顶点在原点，焦点在坐标轴上时，抛物线方程才具有标准形式；
- (6) 抛物线标准方程中参数 p 代表：抛物线的焦点到准线的距离，所以 p 的值永远大于 0.

3. 抛物线的几何性质的应用

利用抛物线的性质可以解决的问题

- (1) 对称性：解决抛物线的内接三角形问题.
- (2) 焦点、准线：解决与抛物线的定义有关的问题.
- (3) 范围：解决与抛物线有关的最值问题.
- (4) 焦点弦：解决焦点弦问题.

二、练习模块

一、单选题

- 若方程 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m-2} = 1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则实数 m 的取值范围为（ ）

A. $0 < m < 2$ B. $0 < m < 2$ 且 $m \neq 1$ C. $0 < m < 1$ D. $1 < m < 2$
- 点 $M(5,3)$ 到抛物线 $x^2 = ay$ 的准线的距离为 6，那么抛物线的标准方程是（ ）

A. $x^2 = 12y$ B. $x^2 = \frac{1}{12}y$ 或 $x^2 = -\frac{1}{36}y$

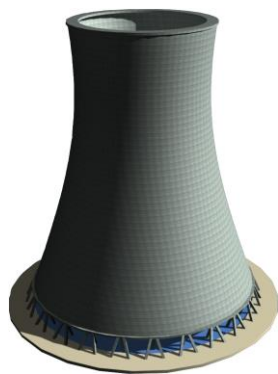
C. $x^2 = 12y$ 或 $x^2 = -36y$ D. $x^2 = -\frac{1}{36}y$
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2，一个焦点在抛物线 $y^2 = 12x$ 的准线上，则 C 的顶点到渐近线的距离为（ ）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. 3
- 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，点 $B(1,3)$ ，若点 A 为抛物线上任意一点，当 $|AB| + |AF|$ 取最小值时，点 A 的坐标为（ ）

A. (1,4) B. (4,1) C. $(\frac{1}{4}, 1)$ D. $(1, \frac{1}{4})$
- 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为（ ）

A. 13 B. 12 C. 9 D. 6
- 已知 M 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左支上的一个点， F_1, F_2 是双曲线的左、右焦点， $MF_1 \perp MF_2$ ，且 $\sin \angle MF_1F_2 : \sin \angle MF_2F_1 = 2:1$ ，则双曲线的离心率为（ ）

A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$
- 3D 打印是快速成型技术的一种，它是一种以数字模型文件为基础，运用粉末状金属或塑料等可粘合材料，通过逐层打印的方式来构造物体的技术，如图所示的塔筒为 3D 打印的双曲线型塔筒，该塔筒是由离心率为 $\sqrt{5}$ 的双曲线的一部分围绕其旋转轴逐层旋转打印得到的，已知该塔筒（数据均以外壁即塔筒外侧表面计算）的上底直径为 $6\sqrt{2}\text{cm}$ ，下底直径为 $9\sqrt{2}\text{cm}$ ，喉部（中间最细处）的直径为 8cm ，则该塔筒的高为（ ）



- A. $\frac{27}{2}$ cm B. 18cm C. $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ cm D. $9\sqrt{2}$ cm

8. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > b_2 > 0)$ 有相同的焦点

F_1, F_2 , 椭圆 C_1 的离心率为 e_1 , 双曲线 C_2 的离心率为 e_2 , 点 P 为椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的交

点, 且 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$, 则 $\frac{2}{e_1} + \frac{3}{e_2}$ 的最大值为 ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{7}$

二、多选题

9. 已知椭圆 $C: x^2 + 4y^2 = 16$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是 C 上的任意一点, 则 ()

- A. C 的离心率为 $\frac{1}{2}$ B. $|PF_1| + |PF_2| = 8$
C. $|PF_1|$ 的最大值为 $4 + 2\sqrt{3}$ D. 使 $\angle F_1 P F_2$ 为直角的点 P 有 4 个

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 点 P 是 C 上位于第一象限的动点, 点

M 为 l 与 x 轴的交点, 则下列说法正确的是 ()

- A. F 到直线 l 的距离为 2
B. 以 P 为圆心, $|PF|$ 为半径的圆与 l 相切
C. 直线 MP 斜率的最大值为 2
D. 若 $|FM| = |FP|$, 则 $\triangle FMP$ 的面积为 2

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 为椭圆 C 的右顶点, B 为椭圆 C 的上顶点, P 为椭圆 C 上与椭圆顶点不重合的动点, 直线 PA 与 y 轴交于点 N , 直线 PB 与 x 轴交于点 M , 则 ()

- A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 当 $PF_1 \perp PF_2$ 时, $|PF_1| \cdot |PF_2| = 3$

C. $|AM| \cdot |BN| = 4$

D. 当点 P 在第三象限时, 若 $MN \parallel AB$, 则 $|OP| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

三、填空题

12. 动点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离比它到直线 $l: y = -4$ 的距离小 2, 则动点 P 的轨迹方程为_____.

13. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 M 在抛物线上, MN 垂直 x 轴与于点 N . 若

$|MF| = 6$, 则点 M 的横坐标为_____; $\triangle MNF$ 的面积为_____.

14. 双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是双曲线 E 的右支上的一点, $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆圆心为 $I(1, 2)$, 记 $\triangle PF_1I$ 、 $\triangle PF_2I$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 则

$S_1 - S_2 =$ _____.

四、解答题

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 F , 动点 B 在双曲线 C 上, 当 $BF \perp AF$ 时, $|BF| = |AF|$.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 已知 $a = 1$, M, N 两点在双曲线的渐近线上, 且分别位于第一、四象限.

若 $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{BN}$, 求 $\triangle MON$ 的面积.