

数学寒假作业（复习） Day 2 （练习时长：40 分钟）

姓名： 完成评价：

一、知识梳理

1. 圆的方程

- (1) 标准式方程：\_\_\_\_\_，其中圆心为（\_\_\_\_，\_\_\_\_），半径为\_\_\_\_\_；
- (2) 一般式方程：\_\_\_\_\_，要求\_\_\_\_\_；
- (3) 求圆方程的一般方法：待定系数法；几何法（垂径定理）。

2. 点与圆的位置关系

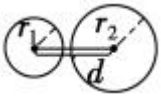
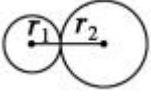
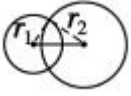


位置关系	利用距离判断（几何法）	利用方程判断（代数法）	切线条数
点 $M$ 在圆上	$ CM $ _____ $r$	$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$ _____ $r^2$	_____
点 $M$ 在圆外	$ CM $ _____ $r$	$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$ _____ $r^2$	_____
点 $M$ 在圆内	$ CM $ _____ $r$	$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$ _____ $r^2$	_____

3. 直线与圆的位置关系

位置关系		相交	相切	相离
公共点个数		_____ 个	_____ 个	_____ 个
判断 方法	几何法： 设圆心到直线的距离为 $d$	_____	_____	_____
	代数法： $\begin{cases} Ax + By + c = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$ 消元得	_____	_____	_____
	到一元二次方程，可得方程的判别式 $\Delta$			

当直线与圆相交时，设圆心到直线的距离为  $d$ ，圆的半径为  $r$ ，则弦长  $l =$ \_\_\_\_\_。

4. 圆与圆的位置关系

位置关系	外离	外切	相交	内切	内含
图示					
公共点个数					
$\Delta$ 的值					
$d$ 与 $r_1, r_2$ 的关系					
公切线条数					

圆  $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$  相交时，公共弦所在的直线方程为\_\_\_\_\_.

### 一、单选题（每题只有一个选项正确）

1. 如果直线  $y = x + b$  与圆  $C: x^2 + y^2 = 4$  相切，则  $b$  的值（ ）

- A.  $2\sqrt{2}$       B.  $\pm 2\sqrt{2}$       C.  $-2\sqrt{2}$       D.  $\pm 4\sqrt{2}$

2. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知直线  $kx - y - k + 1 = 0$  与圆  $(x-1)^2 + y^2 = 4$  相交于  $A, B$  两点，则  $|AB|$  的最小值为（ ）

- A. 1      B.  $\sqrt{3}$       C. 2      D.  $2\sqrt{3}$

3. 若直线  $mx + ny + 2 = 0$  ( $m > 0, n > 0$ ) 截得圆  $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 1$  的弦长为 2，则  $\frac{1}{m} + \frac{3}{n}$  的最小值为（ ）

- A. 4      B. 6      C. 12      D. 16

4. 已知直线  $y = k(x+2)$  与曲线  $y = \sqrt{1-x^2}$  有公共点，则实数  $k$  的取值范围是（ ）

- A.  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$       B.  $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$       C.  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]$       D.  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

5. 已知点  $A$  在圆  $x^2 + y^2 = 4$  上运动，点  $B(6, 8)$ ,  $M$  是  $AB$  的中点，记点  $M$  的轨迹为曲线  $E$ . 若直线  $l$  过点  $(4, 0)$ ，且与曲线  $E$  有且仅有一个公共点，则直线  $l$  的方程为（ ）

- A.  $3x + y - 12 = 0$       B.  $15x + 8y - 60 = 0$   
C.  $3x + y - 12 = 0$  或  $x = 4$       D.  $15x + 8y - 60 = 0$  或  $x = 4$

6. 已知直线  $l: \sqrt{3}x + y - 4 = 0$ ，圆  $\Gamma: x^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ )，若直线  $l$  上存在两点  $A, B$ ，圆  $\Gamma$  上存在点  $C$ ，使得  $|AB| = 2$ ，且  $\angle ACB = 90^\circ$ ，则  $r$  的取值范围是（ ）

- A.  $[1, 3]$       B.  $[2, 3]$       C.  $[1, +\infty)$       D.  $[2, +\infty)$

7. 一条光线从点  $(5, 4)$  射出，经  $x + y - 2 = 0$  反射后与圆  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$  相切，则反射光线所在直线的斜率为（ ）

- A.  $\frac{3}{2}$  或  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{4}{3}$  或  $\frac{3}{4}$       C.  $\frac{4}{5}$  或  $\frac{5}{4}$       D.  $\frac{6}{5}$  或  $\frac{5}{6}$

8. 已知直线  $l: (m+1)x + (m-1)y - 2m = 0$  过定点  $P$ ，圆  $M$  的方程为  $(x+2)^2 + y^2 = 25$ ，若  $A$  是直线  $l$  与圆  $M$  的一个交点，则  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AP}$  的最大值为（ ）

- A.  $16 - 4\sqrt{10}$       B.  $16 + 4\sqrt{10}$       C.  $25 + 5\sqrt{10}$       D.  $25 - 5\sqrt{10}$

## 二、多选题

9. 已知实数  $x$ 、 $y$  满足方程  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. 直线  $y = x$  被圆截得的弦长为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B.  $x^2 + y^2$  的最大值  $\sqrt{5} + 1$

C.  $\frac{y}{x}$  的最大值为  $\frac{4}{3}$

D.  $y + x$  的最大值为  $3 + \sqrt{2}$

10. 圆  $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  与圆  $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$  相交于  $A$ ， $B$  两点，下列说法正确的是（ ）

A.  $AB$  的直线方程为  $2x + 2y - 3 = 0$

B. 公共弦  $AB$  的长为  $\frac{\sqrt{14}}{4}$

C. 圆  $C_1$  与圆  $C_2$  的公切线段长为 1

D. 线段  $AB$  的中垂线方程为  $x + y = 0$

11. 已知直线  $l: (m+2)x + y - m - 3 = 0$  与圆  $C: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ，则（ ）

A. 直线  $l$  过定点  $(1, 1)$

B. 圆  $C$  的半径为 4

C. 直线  $l$  与圆  $C$  一定相交

D. 圆心  $C$  到直线  $l$  的距离的最大值是 1

12. 已知  $m > 0$ ， $n < 0$ ， $C(x, y)$  是曲线  $y = \sqrt{4x - x^2}$  上的任意一点，若  $|x - y + m| + |x - y + n|$  的值与  $x, y$  无关，则（ ）

A.  $m$  的取值范围为  $[2\sqrt{2} - 2, +\infty)$

B.  $n$  的取值范围为  $(-\infty, -2\sqrt{2} - 2]$

C.  $|x - y + 3|$  的最大值为 7

D.  $|x - y + m| + |x - y + n|$  的最小值为  $2 + 2\sqrt{2}$

## 三、填空题.

13. 在平面直角坐标系  $xOy$  中， $A$ ， $B$  分别在  $x$  轴、 $y$  轴正半轴上移动， $AB = 2$ ，若点  $P$  满足  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 2$ ，则  $OP$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

14. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，圆  $O$  以原点为圆心，且经过点  $M(1, \sqrt{3})$ . 则圆  $O$  的方程为\_\_\_\_\_；若直线  $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$  与圆  $O$  交于两点  $A$ ， $B$ ，则弦长  $|AB| =$ \_\_\_\_\_.

15. 几何学史上有一个著名的米勒问题：“设点 $M, N$ 是锐角 $\angle AQB$ 的一边 $QA$ 上的两点，试在边 $QB$ 上找一点 $P$ ，使得 $\angle MPN$ 最大。”如图，其结论是：点 $P$ 为过 $M, N$ 两点且和射线 $QB$ 相切的圆与射线 $QB$ 的切点. 根据以上结论解决以下问题：在平面直角坐标系 $xOy$ 中，给定两点 $M(0, 2), N(2, 4)$ ，点 $P$ 在 $x$ 轴上移动，当 $\angle MPN$ 取最大值时，点 $P$ 的横坐标是\_\_\_\_\_.

四、解答题.

16. 已知平面内的动点 $M$ 与两个定点 $A(-1, 1), B(-1, 4)$ 的距离的比为 $\frac{1}{2}$ ，记动点 $M$ 的轨迹为曲线 $\Gamma$ .

(1) 求曲线 $\Gamma$ 的方程，并说明其形状；

(2) 已知 $D(-1, 0)$ ，过直线 $x=5$ 上的动点 $P(5, p)$ 分别作曲线 $\Gamma$ 的两条切线 $PQ, PR$ （ $Q, R$ 为切点），证明：直线 $QR$ 过定点，并求该定点坐标；

