

数学学科寒假作业（预习）Day 15

等差数列的前 n 项和

姓名： 完成评价：

一、知识归纳

1、等差数列前 n 项和公式

已知量	首项、末项与项数	首项、公差与项数
选用公式	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

2、数列中 a_n 与 S_n 的关系

对于一般数列 $\{a_n\}$ ，设其前 n 项和为 S_n ，则有 $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$

3、等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的性质

性质 1：“片段和”性质	等差数列中依次 k 项之和 $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \dots$ 组成公差为 k^2d 的等差数列
性质 2：“奇偶项”性质	若等差数列的项数为 $2n(n \in \mathbf{N}_+)$ ，则 $S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$ ， $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd$ ， $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} (S_{\text{奇}} \neq 0)$ ；若等差数列的项数为 $2n-1(n \in \mathbf{N}_+)$ ，则 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$ (a_n 是数列的中间项)， $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n$ ， $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{n-1}{n} (S_{\text{奇}} \neq 0)$

4、等差数列前 n 项和的函数性质与最值

① . 等差数列前 n 项和公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 可化成关于 n 的函数得 $S_n = \frac{d}{2}n^2 +$

$$\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n.$$

② . 因为 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ ，若 $d \neq 0$ ，则从二次函数的角度看：当 $d > 0$ 时， S_n 有最小值；当 $d < 0$ 时， S_n 有最大值；且 n 取最接近对称轴的自然数时， S_n 取到最值 .

③ . 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，当 $a_1 > 0, d < 0$ 时， S_n 有最大值，使 S_n 取到最值的 n 可由不等式

组 $\begin{cases} a_n \geq 0, \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$ 确定；当 $a_1 < 0, d > 0$ 时， S_n 有最小值，使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组

$$\begin{cases} a_n \leq 0, \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases} \quad \text{确定.}$$

二、练习模块

(一) 单选题

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_3 + a_6 = 9$, $S_6 = 21$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差是()

- A. -1 B. 2 C. 1 D. -2

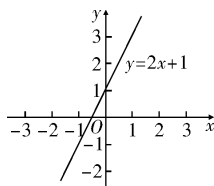
2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $2 + a_5 = a_6 + a_3$, 则 $S_7 =$ ()

- A. 28 B. 14 C. 7 D. 2

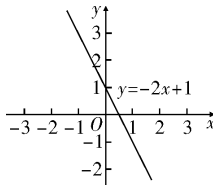
3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1$, $\sqrt{S_3} = a_2$, 则 $a_8 =$ ()

- A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

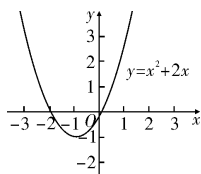
4. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n = 2n + 1$, S_n 为其前 n 项和, 则下列函数图象中, 点 (n, S_n) 在图象上的是()



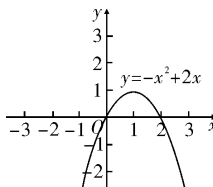
A



B



C



D

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = 7$, $S_{12} = 45$. 则 $S_8 =$ ()

- A. 28 B. 26 C. 24 D. 22

6. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_9 = \frac{45}{2}$, 则 $2a_8 - a_{11} =$ ()

- A. $\frac{5}{2}$ B. 3 C. $\frac{9}{2}$ D. 5

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d < 0$, $a_3 a_5 = 24$, $a_2 + a_6 = 10$, 记该数列的前 n 项和为

S_n , 则 S_n 的最大值为()

A.20

B.24

C.36

D.40

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 与等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n , 且 $\frac{S_n}{T_{2n-1}} = \frac{5n+3}{4n-2}$, 则

$$\frac{a_3}{b_{11}} + \frac{a_9}{b_{11}} = (\quad)$$

A. $\frac{29}{21}$

B. $\frac{29}{11}$

C. $\frac{58}{21}$

D. $\frac{58}{11}$

(二) 多选题

9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, d 为 $\{a_n\}$ 的公差. 已知 $S_4 = 0$, $a_5 = 5$, 则()

A. $a_2 + a_3 = 0$

B. $a_n = 2n - 5$

C. $d = -2$

D. $S_n = n(n-4)$

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 当首项 a_1 和 d 变化时, $a_3 + a_8 + a_{13}$ 是一个定值, 则下列各数也为定值的是()

A. a_8

B. a_{12}

C. S_{15}

D. S_{16}

11. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项的和, 且 $S_5 < S_6$, $S_6 = S_7 > S_8$, 则下列结论正确的是()

A. $d < 0$

B. $a_7 = 0$

C. $S_9 > S_5$

D. S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值

(三) 填空题

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 3$, $S_n - S_{n-3} = 51 (n > 3)$, $S_n = 100$, 则公差 $d =$ _____.

13. 已知等差数列的前三项依次为 a , 4 , $3a$, 前 n 项和为 S_n , 且 $S_k = 110$, 则 $a =$ _____, $k =$ _____.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 2n - 1$, $b_n = 3n - 2$, 将数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{c_n\}$, 则 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 _____.

(四) 解答题

15. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 33n - n^2$.

(1) 求证: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 设 $b_n = |a_n|$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .