

§ 5.3.2 组合数的性质

【学习目标】

- 1.掌握组合数公式和组合数的性质.
- 2.能运用组合数的性质进行计算.
- 3.会用组合数公式解决一些简单的组合问题.

【重点难点】

重点：理解组合数的两个性质，并会求值,化简和证明.

难点：会用组合数公式解决一些简单的组合问题.

【导语流程】

一、基础感悟（导学导读）:

在组合数的运算和化简、证明过程中，除了直接使用组合数公式外，还有与组合数有关的一些性质，这节课就来探究组合数的性质.

二、未知探索

◇探究一 组合数的性质 1

问题 1 假如我们年级将在月底进行一场篮球比赛. 包括体育委员在内，班上篮球运动员有 8 人，按照篮球比赛规则，比赛时一个球队的上场队员是 5 人. 我们可以形成多少种队员上场方案？我们又可以形成多少种队员不上场方案？这两种方案有什么关系？



【知识梳理】

组合数的性质 1: $C_n^m = \underline{\hspace{2cm}}$.

注意点:

(1)体现了“取法”与“剩法”是一一对应的思想;

(2)两边下标相同,上标之和等于下标.

例1 (1)计算: $C_{2\ 022}^{2\ 021}$ = _____, $C_{n+1}^n \cdot C_n^{n-2}$ = _____.

(2)(多选)若 $C_{20}^{2n-3} = C_{20}^{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 则 n 等于()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

跟踪训练1 (1)若 $C_n^6 = C_n^5$, 则 C_n^{10} 等于()

A. 1 B. 10 C. 11 D. 55

(2)若 $C_{18}^{3n+6} = C_{18}^{4n-2}$, 则 C_8^n = _____.

◇探究二 组合数的性质2

问题2 从问题1中的这8名篮球运动员中选择5人的时候,可以按照体育委员是否入选进行分类:当体育委员入选时,有 C_7^4 种选法;当体育委员未入选时,有 C_7^5 种选法. 这与直接选5人参加的选法一样吗? 你能得出什么结论?

【知识梳理】

组合数的性质2: $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

注意点:

(1)下标相同而上标差1的两个组合数之和,等于下标比原下标多1而上标与大的相同的一个组合数;

(2)体现了“含”与“不含”的分类思想.

例2 (1)已知 $m \geq 4$, $C_m^3 - C_{m+1}^4 + C_m^4$ 等于()

A. 1 B. m C. $m+1$ D. 0

(2) $C_4^0 + C_4^1 + C_5^2 + C_6^3 + \cdots + C_{2\ 022}^{2\ 019}$ 等于()

A. $C_{2\ 020}^2$ B. $C_{2\ 021}^3$ C. $C_{2\ 022}^3$ D. $C_{2\ 023}^4$

延伸探究 若将式子换成“ $C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 + \cdots + C_{2\ 022}^3$ ”，则其值为多少？

跟踪训练 2 (1)若 $C_{n+1}^7 - C_n^7 = C_n^8$ ，则 n 等于()

A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

(2) $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{18}^2$ 等于()

A. C_{18}^3 B. C_{19}^3 C. $C_{18}^3 - 1$ D. $C_{19}^3 - 1$

◇探究三 组合数在实际问题中的简单应用

例 3 在 6 名内科医生和 4 名外科医生中，现要组成 5 人医疗小组送医下乡，依下列条件各有多少种选派方法？

(1)有 3 名内科医生和 2 名外科医生；

(2)既有内科医生，又有外科医生.

跟踪训练 3 某市工商局对 35 种商品进行抽样检查，鉴定结果有 15 种假货，现从 35 种商品中选取 3 种.

(1)恰有 2 种假货在内的不同取法有多少种？

(2)至少有 2 种假货在内的不同取法有多少种？

(3)至多有 2 种假货在内的不同取法有多少种？

三、当堂检测

1. 若 $C_{n+1}^6 - C_n^6 = C_n^7 (n \in \mathbf{N}_+)$ ，则 n 等于()

A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

2. 把 5 名同学分到甲、乙、丙 3 个小组，若甲组至少两人，乙、丙组至少各一人，

则不同的分配方案有()

- A. 80 种 B. 120 种 C. 140 种 D. 50 种

3. $C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 + \cdots + C_{21}^{18} =$ _____.

4. $(1)C_{20}^{18} =$ _____.

$(2)C_{99}^3 + C_{99}^2 =$ _____.

四、课堂小结

1. 知识清单：

(1)组合数的两个性质及性质的理解；

(2)组合数在实际问题中的应用.

2. 方法归纳：分类讨论、间接法.

3. 常见误区：不注意组合数中 m 与 n 的限制条件；计算中不能构造组合数性质.

五、课时对点练

基础巩固

1. 化简 $C_{98}^{97} + 2C_{98}^{96} + C_{98}^{95}$ 等于()

- A. C_{99}^{97} B. C_{100}^{97} C. C_{99}^{98} D. C_{100}^{98}

2. 方程 $C_{14}^x = C_{14}^{2x-4}$ 的解集为()

- A. 4 B. 14 C. 4 或 6 D. 14 或 2

3. 某施工小组有男工 7 名，女工 3 名，现要选 1 名女工和 2 名男工去支援另一施工队，不同的选法有()

- A. C_{10}^3 种 B. A_{10}^3 种 C. $A_7^2 A_3^1$ 种 D. $C_3^1 C_7^2$ 种

4. 从 5 名志愿者中选派 4 人在星期六和星期日参加公益活动，每人一天，每天两人，则不同的选派方法共有()

- A. 60 种 B. 48 种 C. 30 种 D. 10 种

5. $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 + C_7^4 + C_8^4 + C_9^4$ 等于()

- A. C_{10}^4 B. C_{10}^5 C. C_{10}^6 D. A_{10}^4
6. (多选)对于 $m, n \in \mathbf{N}_+$, 关于下列排列组合数, 结论正确的是()
- A. $C_n^m = C_n^{n-m}$ B. $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$ C. $A_n^m = C_n^m A_m^m$ D. $A_{n+1}^{m+1} = (m+1)A_n^m$
7. 计算 $C_7^3 + C_7^4 + C_8^5$ 的值为_____.
8. 某单位有 15 名成员, 其中男性 10 人, 女性 5 人, 现需要从中选出 6 名成员组成考察团外出参观学习, 如果按性别分层, 并在各层按比例随机抽样, 则此考察团的组成的方法种数是_____.
9. 现有 5 名男司机, 4 名女司机, 需选派 5 人运货到某市.
- (1)如果派 3 名男司机、2 名女司机, 共有多少种不同的选派方法?
- (2)至少有两男司机, 共有多少种不同的选派方法?
10. 在一次数学竞赛中, 某学校有 12 人通过了初试, 学校要从中选出 5 人参加市级培训. 在下列条件下, 有多少种不同的选法?
- (1)任意选 5 人;
- (2)甲、乙、丙三人必须参加;
- (3)甲、乙、丙三人不能参加;
- (4)甲、乙、丙三人只能有 1 人参加.

11. 从 10 名大学毕业生中选 3 人担任村长助理, 则甲、乙至少有 1 人入选, 而丙没有入选的不同选法的种数为()

- A. 28 B. 49 C. 56 D. 85

12. 从长度分别为 1,2,3,4,5 的五条线段中, 任取三条的不同取法有 n 种, 在这些取法中, 若以取出的三条线段为边可组成的钝角三角形的个数为 m , 则 $\frac{m}{n}$ 等于()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{2}{5}$

13. 某单位需同时参加甲、乙、丙三个会议, 甲会议需 2 人参加, 乙、丙两个会议各需 1 人参加, 从 10 人中选派 4 人参加这三个会议, 不同的安排方法有_____种.

14. 甲、乙、丙 3 人站到共有 7 级的台阶上, 若每级台阶最多站 2 人, 同一级台阶上的人不区分站的位置, 则不同的站法种数是_____. (用数字作答)

拓展探究

15. 将标号为 1,2, ..., 10 的 10 个球放入标号为 1,2, ..., 10 的 10 个盒子里, 每个盒内放一个球, 恰好 3 个球的标号与其在盒子的标号不一致的放入方法种数为()

- A. 120 B. 240 C. 360 D. 720

16. 第 21 届世界杯足球赛于 2018 年夏季在俄罗斯举办, 共 32 支球队有幸参加, 它们先分成 8 个小组进行循环赛, 决出 16 强(每队均与本组其他队赛一场, 各组一、二名晋级 16 强), 这 16 支球队按确定的程序进行淘汰赛, 最后决出冠、亚军, 此外还要决出第三名、第四名, 问这届世界杯总共进行了多少场比赛?