

§ 5.3.1 组合与组合数

【学习目标】

- 1.理解组合的定义，正确认识组合与排列的区别与联系.
- 2.会用组合知识解决一些简单的组合问题.

【重点难点】

重点：理解并掌握组合与组合数的概念，掌握组合与排列之间的联系与区别.

难点：会推导组合数公式，并会应用公式求值.

【导语流程】

一、基础感悟（导学导读）：

小明五一到石城旅游，要从4处景点A, B, C, D中选择2处，上午选1处，下午选1处，有多少种不同的旅游方案？如果仅从4处景点A, B, C, D中选择2处，又有多少种不同的旅游方案呢？



二、未知探索

◇探究一 组合概念的理解

问题1 排列与组合有什么联系和区别？

【知识梳理】

组合及组合问题

(1)组合

一般地，从 n 个_____元素中，任取 m ($m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}_+$) 个_____为一组，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

(2)组合问题

有关求_____的问题叫作组合问题.

注意点:

(1)组合中取出的元素没有顺序;

(2)两个组合相同的充要条件是其中的元素完全相同.

例1 判断下列问题是组合问题还是排列问题:

(1) a, b, c, d 四支足球队之间进行单循环比赛, 共需比赛多少场?

(2) a, b, c, d 四支足球队争夺冠、亚军, 有多少种不同的结果?

(3)从全班40人中选出3人分别担任班长、副班长、学习委员三个职务, 有多少种不同的选法?

(4)从全班40人中选出3人参加某项活动, 有多少种不同的选法?

跟踪训练1 判断下列问题是组合问题还是排列问题:

(1)某铁路线上有4个车站, 则这条铁路线上共需准备多少种车票?

(2)把5本不同的书分给5个学生, 每人一本;

(3)从7本不同的书中取出5本给某个学生.

◇探究二 利用组合数公式化简、求值与证明

问题2 组合数 C_4^3 与排列数 A_4^3 有什么关系? 你能求出 C_4^3 吗?

【知识梳理】

(1)组合数: 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n, m, n \in \mathbf{N}_+)$ 个元素的_____的个数, 叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数, 记作 C_n^m .

(2)组合数公式: $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdot \frac{n-2}{m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{n-m+1}{1} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

(3)规定: $C_n^0 =$ _____.

注意点：

$$(1) m \leq n, m, n \in \mathbb{N}_+;$$

$$(2) C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots [n-m+1]}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 2 \cdot 1} \text{ 常用于计算};$$

$$(3) C_n^m = \frac{n!}{m! (n-m)!} \text{ 常用于证明}.$$

命题角度 1 利用组合数化简、求值

例 2 求值：

$$(1) 3C_8^3 - 2C_6^2;$$

$$(2) C_{3n}^{38-n} + C_{21+n}^{3n}.$$

命题角度 2 利用组合数证明

$$\text{例 3 证明: } C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m.$$

跟踪训练 2

$$(1) \text{计算: } C_{10}^4 - C_7^3 \cdot A_3^3;$$

$$(2) \text{证明: } nC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}.$$

◇探究三 简单的组合问题

例 4 一位教练的足球队共有 17 名初级学员，他们中以前没有一人参加过比赛。按照足球比赛规则，比赛时一个足球队的上场队员是 11 人。问：

- (1)这位教练从这 17 名学员中可以形成多少种学员上场方案？
- (2)如果在选出 11 名上场队员时，还要确定其中的守门员，那么教练员有多少种方式做这件事情？

跟踪训练 3 一个口袋内装有大小相同的 7 个白球和 1 个黑球.

- (1)从口袋内取出 3 个球，共有多少种取法？
- (2)从口袋内取出 3 个球，使其中含有 1 个黑球，有多少种取法？
- (3)从口袋内取出 3 个球，使其中不含黑球，有多少种取法？

三、当堂检测

1. 以下四个命题，属于组合问题的是()
- A. 从 3 个不同的小球中，取出 2 个排成一行
- B. 老师在排座次时将甲、乙两位同学安排为同桌
- C. 在电视节目中，主持人从 100 位幸运观众中选出 2 名幸运之星
- D. 从 13 位司机中任选出两位开同一辆车往返甲、乙两地
2. 从 5 名同学中推选 4 人去参加一个会议，则不同的推选方法种数是()
- A. 10 B. 5 C. 4 D. 1
3. 把三张游园票分给 10 个人中的 3 人，分法有()
- A. A_{10}^3 种 B. C_{10}^3 种 C. $C_{10}^3 A_{10}^3$ 种 D. 30 种
4. 已知 a, b, c, d 这四个元素，则每次取出 2 个元素的所有组合为_____.

四、课堂小结

1. 知识清单：
- (1)组合与组合数的定义.
- (2)排列与组合的区别与联系.
- (3)组合数的计算与证明.
2. 方法归纳：枚举法.
3. 常见误区：分不清“排列”还是“组合”.

五、课时对点练

基础巩固

- (多选)给出下面几个问题，其中是组合问题的有()
 - 由 1,2,3,4 构成的含有 2 个元素的集合个数
 - 五个队进行单循环比赛的比赛场次数
 - 由 1,2,3 组成两位数的不同方法数
 - 由 1,2,3 组成的无重复数字的两位数
- 若 $C_n^2 = 36$ ，则 n 的值为()
 - 7
 - 8
 - 9
 - 10
- 若 5 名代表分 4 张同样的参观券，每人最多分一张，且全部分完，那么分法一共有()
 - A_5^4 种
 - 4^5 种
 - 5^4 种
 - C_5^4 种
- 某新农村社区共包括 8 个自然村，且这些村庄分布零散，没有任何三个村庄在一条直线上，现要在该社区内建“村村通”工程，则共需建公路的条数为()
 - 4
 - 8
 - 28
 - 64
- 从 2,3, ..., 8 中任意取三个不同的数字，组成无重复数字的三位数，要求个位数最大，百位数最小，则这样的三位数的个数为()
 - 35
 - 42
 - 105
 - 210
- 现有 6 个白球，4 个黑球，任取 4 个，则至少有两个黑球的取法种数是()
 - 90
 - 115
 - 210
 - 385
- 10 个人分成甲、乙两组，甲组 4 人，乙组 6 人，则不同的分组种数为_____。(用数字作答)
- 若 $A_{2n}^4 = 120C_n^2$ ，则 $n =$ _____.
- 已知 C_n^4, C_n^5, C_n^6 成等差数列，求 C_n^{12} 的值.
- 现有 10 名教师，其中男教师 6 名，女教师 4 名.
 - 现要从中选出 2 名去参加会议，有多少种不同的选法？
 - 现要从中选出男、女教师各 2 名去参加会议，有多少种不同的选法？

综合运用

11. 已知圆上有 9 个点, 每两点连一线段, 若任意两条线的交点不同, 则所有线段在圆内的交点有()

- A. 36 个 B. 72 个 C. 63 个 D. 126 个

12. (多选)下列选项正确的是()

- A. $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$ B. $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1}$ C. $C_n^m \div C_n^{m+1} = \frac{m+1}{n-m}$ D. $C_{n+1}^{m+1} = \frac{n+1}{m+1} C_n^m$

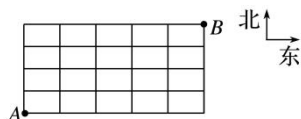
13. 身高各不相同的 7 名同学排成一排照相, 要求正中间的同学最高, 左右两边分别顺次一个比一个低, 则这样的排法种数是()

- A. 5 040 B. 36 C. 18 D. 20

14. 4 名优秀学生全部保送到 3 所学校去, 每所学校至少去 1 名, 则不同的保送方案有____种.

拓广探究

15. 某城市纵向有 6 条道路, 横向有 5 条道路, 构成如图所示的矩形道路网(图中黑线表示道路), 则从西南角 A 地到东北角 B 地的最短路线共有_____条.



16. 某次足球比赛共 12 支球队参加, 分三个阶段进行.

(1)小组赛: 经抽签分成甲、乙两组, 每组 6 队进行单循环比赛, 以积分及净胜球数取前两名;

(2)半决赛: 甲组第一名与乙组第二名, 乙组第一名与甲组第二名作主客场交叉淘汰赛(每两队主客场各赛一场)决出胜者;

(3)决赛: 两个胜队参加决赛一场, 决出胜负.

问: 全部赛程共需比赛多少场?