

§ 5.2.2 排列数公式

【学习目标】

- 1.能用计数原理推导排列数公式.
- 2.能用排列数公式解决简单的实际问题.

【重点难点】

重点：理解排列数公式.

难点：能应用排列公式解决简单的实际问题.

【导语流程】

一、基础感悟（导学导读）：

2021 年是中国共产党成立 100 周年，1921 年中国共产党的诞生掀开了中国历史的新篇章，百年来，党带领全国人民谱写了中华民族自强不息、顽强奋进的壮丽史诗. 有 30 位老革命家参观完一大会址后，要在一大会址旁站成一排照相，那么这 30 位老革命家的排列顺序有多少种？这样的排列问题能否用一个公式来表示呢？



二、未知探究

◇探究一 排列数公式

问题 怎样推导从 n 个不同的元素中取出 $m(m, n \in \mathbb{N}_+, m \leq n)$ 个元素的排列数 A_n^m ?

【知识梳理】

排列数公式

(1) $A_n^m =$ _____;

(2) $A_n^m =$ _____;

(3) $A_n^n =$ _____ (叫作 n 的阶乘); $A_n^0 =$ _____; $0! =$ _____.

注意点:

(1) 乘积是 m 个连续正整数的乘积;

(2) 第一个数最大, 是 A 的下标 n ;

(3) 第 m 个数最小, 是 $n - m + 1$.

命题角度 1 排列数的正用

例 1 计算下列各题:

(1) A_{10}^3

(2) $\frac{A_9^5 + A_9^4}{A_{10}^6 - A_{10}^5}$.

命题角度 2 排列数的逆用

例 2 (1) 用排列数表示 $(55 - n)(56 - n) \cdots (69 - n) (n \in \mathbb{N}_+ \text{ 且 } n < 55)$;

(2) 化简: $n(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n+m)$.

跟踪训练 1 (1) 若 $M = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 + \cdots + A_{2022}^{2022}$, 则 M 的个位数字是()

A. 3 B. 8 C. 0 D. 5

(2) 不等式 $A_8^x < 6A_8^{x-2}$ 的解集为()

A. $[2, 8]$ B. $[2, 6]$ C. $(7, 12)$ D. $\{8\}$

◇探究二 利用排列数公式化简与证明

例 3 求证: $A_{n+1}^m - A_n^m = mA_n^{m-1}$.

跟踪训练 2 (多选) 下列等式正确的是()

A. $(n+1)A_n^m = A_{n+1}^{m+1}$ B. $\frac{n!}{n \cdot n-1} = (n-2)!$ C. $A_m^m = \frac{A_n^m}{n!}$ D. $\frac{1}{n-m} A_n^{m+1} = A_n^m$

◇探究三 排列数公式的简单应用

例4 (教材P163例4改编)某信号兵用红、黄、蓝3面旗从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号,每次可以任意挂1面、2面或3面,并且不同的顺序表示不同的信号,一共可以表示多少种不同的信号?

跟踪训练3 若一个三位数的十位数字比个位数字和百位数字都大,则称这个数为“伞数”.现从2,3,4,5,6,9这六个数字中任取3个数,组成无重复数字的三位数,其中“伞数”有()

- A. 120个 B. 80个 C. 40个 D. 20个

三、当堂检测

1. A_9^3 等于()

- A. 9×3 B. 9^3 C. $9 \times 8 \times 7$ D. $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

2. $4 \times 5 \times 6 \times \cdots \times (n-1) \times n$ 等于()

- A. A_n^4 B. A_n^{n-4} C. $n! - 4!$ D. A_n^{n-3}

3. 某高三毕业班有40人,同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言,那么全班共写了_____条毕业留言.(用数字作答)

4. 从班委会的5名成员中选出3名分别担任班级学习委员、文娱委员与体育委员,其中甲、乙二人不能担任文娱委员,则不同的选法共有_____种.(用数字作答)

四、课堂小结

1. 知识清单:

(1)排列数、排列数公式.

(2)全排列、阶乘、 $0! = 1$.

(3)排列数的应用.

2. 方法归纳:直接法、优先法、间接法.

3. 常见误区:忽视 A_n^m 中“ $n, m \in \mathbb{N}_+$ ”这个条件.

五、课时对点练

基础巩固

- $A_{12}^3 - A_{10}^3$ 的值是()
A. 480 B. 520 C. 600 D. 1 320
- 已知 $A_{n+1}^2 - A_n^2 = 10$ ，则 n 的值为()
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
- 若 $a \in \mathbb{N}_+$ ，且 $a < 20$ ，则 $(27-a)(28-a) \cdots (34-a)$ 等于()
A. A_{27-a}^8 B. A_{34-a}^{27-a} C. A_{34-a}^7 D. A_{34-a}^8
- 有 4 名司机，4 名售票员要分配到 4 辆汽车上，使每辆汽车上有 1 名司机和 1 名售票员，则可能的分配方法有()
A. A_8^8 种 B. A_8^4 种 C. $A_4^4 A_4^4$ 种 D. $2A_4^4$ 种
- 要从 a, b, c, d, e 5 个人中选出 1 名组长和 1 名副组长，但 a 不能当副组长，则不同的选法种数是()
A. 20 B. 16 C. 10 D. 6
- (多选)下列各式中与排列数 A_n^m 相等的是()
A. $\frac{n!}{n-m!}$ B. $n(n-1)(n-2) \cdots (n-m)$
C. $\frac{nA_{n-1}^m}{n-m+1}$ D. $A_n^1 \cdot A_{n-1}^{m-1}$
- 不等式 $A_{n-1}^2 - n < 7$ 的解集为_____.
- 有 3 名大学毕业生，到 5 家招聘员工的公司应聘，若每家公司至多招聘 1 名新员工，且 3 名大学毕业生全部被聘用，若不允许兼职，则共有_____种不同的招聘方案。(用数字作答)
- 求证： $A_{n+1}^{n-m+1} = (n+1)A_n^{n-m}$.
- 用 0 到 9 这 10 个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

综合运用

11. 有5名同学被安排在周一至周五值日, 已知同学甲只能在周一值日, 那么5名同学值日顺序的编排方案共有()
- A. 12种 B. 24种 C. 48种 D. 120种
12. 某班级从A, B, C, D, E, F六名学生中选四人参加 4×100 m接力比赛, 其中第一棒只能在A, B中选一人, 第四棒只能在A, C中选一人, 则不同的选派方法共有()
- A. 24种 B. 36种 C. 48种 D. 72种
13. 由数字1,2,3,4,5组成没有重复数字的五位数, 其中小于50 000的偶数共有()
- A. 60个 B. 48个 C. 36个 D. 24个
14. 用0,1,2,3,4这5个数字组成无重复数字的五位数, 其中恰有一个偶数夹在两个奇数之间的五位数有_____种.

拓广探究

15. 英国数学家泰勒(B.Taylor, 1685-1731)以发现泰勒公式和泰勒级数闻名于世, 由泰勒公式, 我们能得到 $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$ (其中e为自然对数的底数, $0 < \theta < 1$, $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$), 其拉格朗日余项是 $R_n = \frac{e^\theta}{(n+1)!}$. 可以看出, 右边的项用得越多, 计算得到的e的近似值也就越精确. 若 $\frac{3}{(n+1)!}$ 近似地表示e的泰勒公式的拉格朗日余项 R_n , R_n 不超过 $\frac{1}{1\,000}$ 时, 正整数n的最小值是()
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

16. 一条铁路有n个车站, 为适应客运需要, 新增了m个车站, 且知 $m > 1$, 客

运车票增加了 62 种，问原有多少个车站？现在有多少个车站？