

## § 1.4.2 直线与圆锥曲线的综合问题 (第1课时)

## 【学习目标】

1. 进一步熟悉直线与圆锥曲线的位置关系.
2. 掌握弦长公式, 会求解与弦长有关的问题.

【学习重点】 掌握弦长公式.

【学习难点】 会求解与弦长有关系的问题.

【导学流程】

## 一、回顾旧知, 要点指津

我们已经学习了直线与圆锥曲线的位置关系, 回忆学习过的内容, 结合图象, 说明直线与圆锥曲线的位置关系及交点个数.

## 二、自主探索, 独立思考

**问题1.** 如果直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相交于不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则 $AB$ 中点 $M(x_0, y_0)$ 的坐标如何求出?

**问题2.** 如果直线 $l$ 与圆锥曲线 $C$ 相交于不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 怎样求线段 $AB$ 的长度(弦长)?

## 注意点:

- (1) 一定先有判别式\_\_\_\_\_, 才有两根之和、两根之积.
- (2) 对于斜率不确定的问题, 要\_\_\_\_\_.
- (3) 抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点的弦  $AB$ , 弦长  $|AB| =$ \_\_\_\_\_.

## 三、典例讲解, 议疑解惑

**例1** 已知斜率为-2的直线经过椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左焦点 $F_1$ , 与椭圆相交于 $A, B$ 两点,

求: (1) 线段 $AB$ 的中点 $M$ 的坐标;

(2)  $|AB|$ 的值.

**思考探究** 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 判断是否存在以点 $P\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}\right)$ 为中点的弦, 若存在, 求弦所在的直线方程.

## 反思感悟 求弦长的两种方法

(1) 求出弦两端点的坐标, 然后利用两点间的距离公式求解;

(2) 结合根与系数的关系, 利用弦长公式

## 跟踪训练 1

(1) 过抛物线  $C: y^2 = 12x$  的焦点作直线  $l$  交  $C$  于  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  两点, 若  $x_1 + x_2 = 6$ , 则  $|AB|$  等于 ( )

A. 16      B. 12      C. 10      D. 8

(2) 椭圆  $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 则以点  $P(4, 2)$  为中点的弦所在的直线方程为 ( )

A.  $x + 2y + 8 = 0$       B.  $x + 2y - 8 = 0$       C.  $2x + y - 8 = 0$       D.  $2x - y - 8 = 0$

**例 2** 已知直线  $l$  过椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$  的中心, 且交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点, 求  $|AB|$  的取值范围.

**思考探究** 某同学给出了例 2 的如下解决方法:

解: 考虑到直线  $l$  与圆  $C$  的两个交点  $A, B$  是关于中心  $O$  对称的, 所以  $|AB| = 2|OA| = 2\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ .

因为点  $A$  在椭圆  $C$  上, 所以  $x_A^2 + 2y_A^2 = 4$ , 整理, 得  $x_A^2 = 4 - 2y_A^2$ ,

将其代入上式, 消去  $x_A$  可得  $|AB| = 2\sqrt{4 - y_A^2}$ .

由上述函数关系可以求出  $0 \leq |AB| \leq 4$ .

请对该同学的上述解法进行评价.

## 反思感悟 求与椭圆有关的最值、范围问题的方法

(1) 定义法: 利用定义转化为几何问题处理.

(2) 数形结合法: 利用数与形的结合, 挖掘几何特征, 进而求解.

(3) 函数法: 探求函数模型, 转化为函数的最值问题, 借助函数的单调性、基本不等式等求解, 注意椭圆的范围.

## 跟踪训练 2

1. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  和直线  $l: y = 2x + m$ .

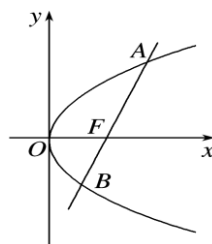
(1) 当椭圆  $C$  与直线  $l$  有公共点时, 求实数  $m$  的取值范围;

(2) 设直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于  $A, B$  两点, 求  $|AB|$  的最大值.

2. 如图, 已知抛物线  $y^2=4x$ , 其焦点为  $F$ .

(1) 若点  $M(1,1)$ , 求以  $M$  为中点的抛物线的弦所在的直线方程;

(2) 若互相垂直的直线  $m, n$  都经过抛物线  $y^2=4x$  的焦点  $F$ , 且与抛物线相交于  $A, B$  两点和  $C, D$  两点, 求四边形  $ACBD$  面积的最小值.



#### 四、课堂小结

1. 知识清单:

(1) 弦长问题.

(2) 与弦长有关的最值问题.

2. 方法归纳: 数形结合.

3. 常见误区: 容易忽略直线斜率不存在的情况.

#### 随堂演练

1.  $AB$  是过抛物线  $C: y^2=4x$  焦点的弦, 且  $|AB|=10$ , 则线段  $AB$  的中点横坐标为( )

A. 4      B. 3      C. 2      D. 1

2. 直线  $2x-y-4=0$  与抛物线  $y^2=6x$  交于  $A, B$  两点, 则线段  $AB$  的长度为( )

A.  $\frac{\sqrt{265}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{285}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{305}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{335}}{2}$

3. 过椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的焦点的最长弦和最短弦的长分别为\_\_\_\_\_.

4. 过椭圆  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  的右焦点作一条斜率为 2 的直线与椭圆交于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点, 则  $\triangle OAB$  的面积为\_\_\_\_\_.

#### 课时对点练

##### 基础巩固

1. 椭圆的焦点为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  的最短弦  $PQ$  的长为 10,  $\triangle PF_2Q$  的周长为 36, 则此椭圆的离心率为( )

A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2. 直线  $y=x-1$  被椭圆  $2x^2+y^2=4$  所截得的弦的中点坐标是( )

A.  $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$       B.  $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$       C.  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$       D.  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

3. 过椭圆  $x^2+2y^2=4$  的左焦点作倾斜角为  $\frac{\pi}{3}$  的弦  $AB$ , 则弦  $AB$  的长为( )

A.  $\frac{6}{7}$       B.  $\frac{16}{7}$       C.  $\frac{7}{16}$       D.  $\frac{7}{6}$

4. 已知椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  与直线  $y = x + m$  交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ , 则实数  $m$  的值为( )
- A.  $\pm 1$       B.  $\pm \frac{1}{2}$       C.  $\sqrt{2}$       D.  $\pm\sqrt{2}$
5. 已知  $F$  是椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  的一个焦点,  $AB$  为过椭圆中心的一条弦, 则  $\triangle ABF$  面积的最大值为( )
- A. 6      B. 15      C. 20      D. 12
6. 已知直线  $l$  过抛物线  $C$  的焦点, 且与  $C$  的对称轴垂直,  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $|AB| = 12$ ,  $P$  为  $C$  的准线上的一点, 则  $\triangle ABP$  的面积为( )
- A. 18      B. 36      C. 45      D. 60
7. 已知双曲线  $x^2 - y^2 = m (m \neq 0)$  与直线  $y = \frac{1}{2}x$  交于  $A, B$  两点, 若  $|AB| = 2\sqrt{15}$ , 则  $m =$ \_\_\_\_\_.
8. 过点  $M(1,1)$  作斜率为  $-\frac{1}{2}$  的直线与椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  相交于  $A, B$ , 则直线  $AB$  的方程为\_\_\_\_\_; 若  $M$  是线段  $AB$  的中点, 则椭圆  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.
9. 已知椭圆  $4x^2 + y^2 = 1$  及直线  $y = x + m$ , 若直线被椭圆截得的弦长为  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ , 求直线的方程.
10. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$  焦点为  $F$ , 点  $D$  为其准线与  $x$  轴的交点, 过点  $F$  的直线  $l$  与抛物线相交于  $A, B$  两点, 求  $\triangle DAB$  的面积  $S$  的取值范围.

### 综合运用

11. 直线  $l$  经过点  $(4,2)$ , 且与抛物线  $C: y^2 = 4x$  交于  $P, Q$  两点, 若  $P$  与  $Q$  的纵坐标之和为 4, 则直线  $l$  的方程为( )
- A.  $x - y + 2 = 0$       B.  $x - 2y - 6 = 0$   
C.  $x - y - 2 = 0$       D.  $x - 2y = 0$
12. 斜率为 1 的直线  $l$  与椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  相交于  $A, B$  两点, 则  $|AB|$  的最大值为( )
- A.  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$       B.  $\frac{4\sqrt{10}}{5}$       C.  $\frac{8\sqrt{10}}{5}$       D.  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
13. 椭圆  $mx^2 + ny^2 = 1$  与直线  $y = 1 - x$  交于  $M, N$  两点, 过原点与线段  $MN$  中点的直线的斜率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则  $\frac{m}{n}$  的值是( )
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{9\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{2\sqrt{3}}{27}$
14. 已知抛物线  $y^2 = 4x$ , 过点  $P(4,0)$  的直线与抛物线相交于  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  两点, 则  $y_1^2 + y_2^2$  的最小值是\_\_\_\_\_.