

正道年级国庆数学试卷 4 答案

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直线 $ax+by-1=0$ 在 y 轴上的截距为 -1 ，且它的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ ，则 $a-b=$ ()

- A. 0 B. 1 C. -2 D. 2

【答案】D

【解析】因为直线 $ax+by-1=0$ 在 y 轴上的截距为 -1 ，

所以 $0 \times a + b \times (-1) - 1 = 0$ ，所以 $b = -1$ ，

则直线方程可化为 $y = ax - 1$ ，

又因为直线倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ ，所以 $a = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ ，

所以 $a-b=2$. 故选：D

2. 侧面积为 2π 的圆锥，它的侧面展开图是一个半圆，则该圆锥的底面半径为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. 2 D. 1

解：设底面半径为 r ，母线长为 l ，

$$\text{则 } 2\pi = \frac{1}{2} \pi l^2, \text{ 解得 } l=2,$$

$$\text{又 } S = \pi r l = 2\pi r = 2\pi, \text{ 解得 } r=1.$$

3. 圆 $C_1: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ 和圆 $C_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 的公切线的条数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

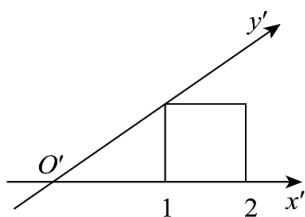
【解析】圆 $C_1: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ 的圆心 $C_1(-1, -1)$ ，半径 $r_1 = 2$

和圆 $C_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 的圆心 $C_2(2, 3)$ ，半径 $r_2 = 3$

$$\text{则 } |C_1C_2| = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = 5, r_1 + r_2 = 5, |r_1 - r_2| = 1$$

所以 $|C_1C_2| = r_1 + r_2$ ，故两圆外切，则两圆公切线条数为 3. 故选：C.

4. 如图，一个水平放置的平面图形的直观图（斜二测画法）是一个边长为 1 的正方形，则这个平面图形的面积是 ()

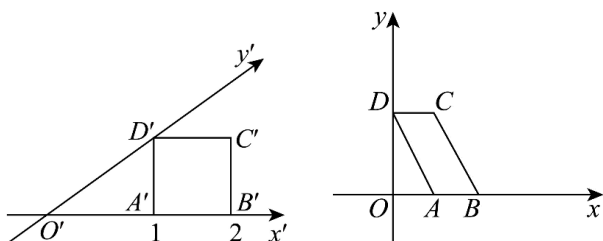


- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

【答案】A

【解析】如图，不妨令直观图中正方形为 $A'B'C'D'$ ，则 $A'B' = A'D' = 1$ ，

所以 $O'D' = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，



由直观图可得如下平面图形，则 $AB = A'B' = 1$ ， $OD = 2O'D' = 2\sqrt{2}$ ，

所以 $S_{ABCD} = 1 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. 故选：A

5. 已知 m, n 是两条不同的直线， α, β 是两个不重合的平面，则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $m \parallel n$ ， $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $\alpha \parallel \beta$ ， $m \parallel \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，则 $m \parallel n$
C. 若 $m \perp n$ ， $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ，则 $m \perp n$

【答案】C

【解析】对于 A，若 $m \parallel n$ ， $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ，当 m, n 都平行于 α, β 的交线时，

满足条件，此时 α, β 相交，故 A 错误；

对于 B，若 $\alpha \parallel \beta$ ， $m \parallel \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，则 m, n 可能异面，故 B 错误；

对于 C，若 $m \perp n$ ， $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$ ，故 C 正确；

对于 D，若 $\alpha \perp \beta$ ， $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ，则 m, n 可能平行或异面，故 D 错误. 故选：C.

6. 点 $P(-2, -1)$ 到直线 $l: (1+3\lambda)x + (1+\lambda)y - 2 - 4\lambda = 0 (\lambda \in \mathbb{R})$ 的距离最大时，其最大值以及此时的直线方程分别为 ()

- A. $\sqrt{13}$ ； $3x + 2y - 5 = 0$ B. $\sqrt{11}$ ； $3x + 2y - 5 = 0$

C. $\sqrt{13}$; $2x-3y+1=0$

D. $\sqrt{11}$; $2x-3y+1=0$

【答案】A

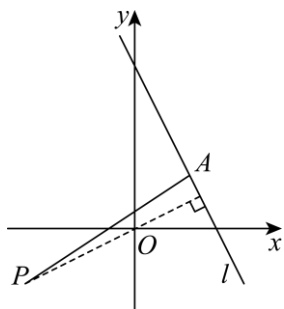
【解析】将直线 $l: (1+3\lambda)x + (1+\lambda)y - 2 - 4\lambda = 0 (\lambda \in \mathbb{R})$ 变形得 $x + y - 2 + \lambda(3x + y - 4) = 0$,

由 $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, 因此直线 l 过定点 $A(1, 1)$,

当 $AP \perp l$ 时, 点 $P(-2, -1)$ 到直线 $l: (1+3\lambda)x + (1+\lambda)y - 2 - 4\lambda = 0 (\lambda \in \mathbb{R})$ 的距离最大,

最大值为 $|AP| = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13}$, 又直线 AP 的斜率 $k_{AP} = \frac{-1-1}{-2-1} = \frac{2}{3}$,

所以直线 l 的方程为 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, 即 $3x + 2y - 5 = 0$. 故选: A



7. 过点 $P(0, -1)$ 作直线 l , 若直线 l 与连接 $A(-2, 1)$, $B(2\sqrt{3}, 1)$ 两点的线段总有公共点, 则直线 l 的倾斜角范围为 ()

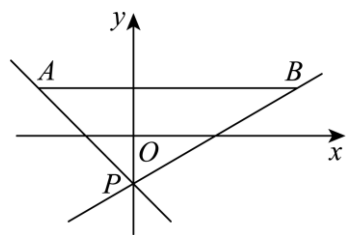
A. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$

B. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$

C. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

D. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

【答案】B



【解析】

设直线 l 的斜率为 k , 倾斜角为 θ , $0 \leq \theta < \pi$,

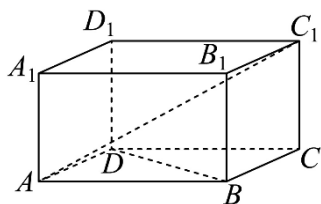
$$k_{PA} = \frac{-1-1}{0-(-2)} = -1, \quad k_{PB} = \frac{1-(-1)}{2\sqrt{3}-0} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

因为直线 l 经过点 $P(0, -1)$, 且与线段 AB 总有公共点,

所以 $k \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$,

因为 $0 \leq \theta < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. 故选: B.

8. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=8$, $AD=6$, 异面直线 BD 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$, 则该长方体外接球的表面积为 ()



- A. 90π B. 196π C. 784π D. $\frac{1372}{3}\pi$

【答案】B

【解析】连接 AC 与 BD 交于 O 点, 则 O 为 AC 中点,

取 CC_1 中点 E , 连接 BE, OE , 则 $AC_1 \parallel OE$,

$\therefore \angle EOB$ 为异面直线 BD 与 AC_1 所成角 (或补角),

设 $CE=x$, $AB=8$, $AD=6$, 则 $BE=\sqrt{x^2+36}$, $OB=OC=5, OE=\sqrt{25+x^2}$,

在 $\triangle OBE$ 中, 由余弦定理得 $BE^2 = OB^2 + OE^2 - 2OB \times OE \times \cos \angle EOB$,

若 $\cos \angle EOB = \frac{1}{5}$, 则 $36+x^2 = 25+25+x^2 - 2\sqrt{25+x^2}$, 解得 $x=2\sqrt{6}$ (负值已舍去),

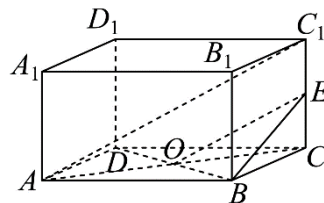
若 $\cos \angle EOB = -\frac{1}{5}$, 则 $36+x^2 = 25+25+x^2 + 2\sqrt{25+x^2}$, 方程无解,

所以 $CC_1=2x=4\sqrt{6}$,

所以长方体的对角线长为 $\sqrt{36+64+96}=14$,

所以长方体的外接球的半径 $R=7$,

所以长方体外接球的表面积 $S=4\pi R^2=196\pi$. 故选: B



二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知直线 $l_1: x+(a-1)y+1=0$, 直线 $l_2: ax+2y+2=0$, 则下列结论正确的是 ()

- A. l_1 在 x 轴上的截距为 -1 B. l_2 过定点 $(0,-1)$
C. 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a=-1$ 或 $a=2$ D. 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $a=\frac{2}{3}$

【答案】ABD

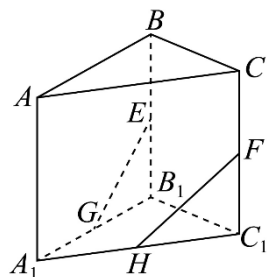
【解析】由 $l_1: x+(a-1)y+1=0$ 易知 $y=0 \Rightarrow x=-1$, 故 A 正确;

由 $l_2: ax + 2y + 2 = 0 \Rightarrow x = 0, y = -1$, 故 B 正确;

若两直线平行, 则有 $1 \times 2 = a(a-1)$ 且 $1 \times 2 \neq a \times 1$, 解得 $a = -1$, 故 C 错误;

若两直线垂直, 则有 $a \times 1 + 2 \times (a-1) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$, 故 D 正确. 故选: ABD

10. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, E, F, G, H 分别为 $BB_1, CC_1, A_1B_1, A_1C_1$ 的中点, 则下列说法正确的是 ()



- A. E, F, G, H 四点共面 B. $EF \parallel GH$
C. EG, FH, AA_1 三线共点 D. $\angle EGB_1 = \angle FHC_1$

【答案】ABC

【解析】对于 AB, 如图, 连接 EF, GH ,

因为 GH 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中位线, 所以 $GH \parallel B_1C_1$,

因为 $B_1E \parallel C_1F$, 且 $B_1E = C_1F$, 所以四边形 B_1EFC_1 是平行四边形,

所以 $EF \parallel B_1C_1$, 所以 $EF \parallel GH$, 所以 E, F, G, H 四点共面, AB 正确;

对于 C, 如图, 延长 EG, FH 相交于点 P ,

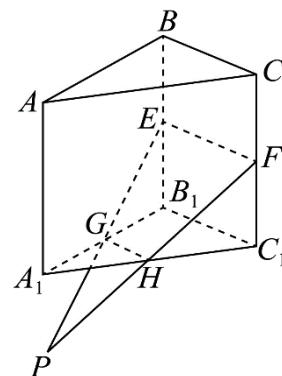
因为 $P \in EG$, $EG \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $P \in$ 平面 ABB_1A_1 ,

因为 $P \in FH$, $FH \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $P \in$ 平面 ACC_1A_1 ,

因为平面 $ABB_1A_1 \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = AA_1$, 所以 $P \in AA_1$, 所以 EG, FH, AA_1 三线共点, C 正确;

对于 D, 因为 $EB_1 = FC_1$, 当 $GB_1 \neq HC_1$ 时, $\tan \angle EGB_1 \neq \tan \angle FHC_1$,

又 $0 < \angle EGB_1, \angle FHC_1 < \frac{\pi}{2}$, 则 $\angle EGB_1 \neq \angle FHC_1$, D 错误. 故选: ABC



11. 已知实数 x, y 满足曲线 C 的方程 $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$, 则下列选项正确的是 ()

A. $x^2 + y^2$ 的最大值是 $\sqrt{3} + 1$

B. $\frac{y+1}{x+1}$ 的最大值是 $2 + \sqrt{6}$

C. $|x-y+3|$ 的最小值是 $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

D. 过点 $(0, \sqrt{2})$ 作曲线 C 的切线, 则切线方程为 $x-\sqrt{2}y+2=0$

【答案】BD

【解析】由圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ 可化为 $(x-1)^2 + y^2 = 3$, 可得圆心 $(1, 0)$, 半径为 $r = \sqrt{3}$,

对于 A 中, 由 $x^2 + y^2$ 表示圆 C 上的点到定点 $O(0, 0)$ 的距离的平方,

所以它的最大值为 $[\sqrt{(1-0)^2 + 0^2} + \sqrt{3}]^2 = 4 + 2\sqrt{3}$, 所以 A 错误;

对于 B 中, $\frac{y+1}{x+1}$ 表示圆上的点与点 $P(-1, -1)$ 的斜率 k , 设 $\frac{y+1}{x+1} = k$, 即 $y+1 = k(x+1)$,

由圆心 $(1, 0)$ 到直线 $y+1 = k(x+1)$ 的距离 $d = \frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} \leq \sqrt{3}$, 解得 $2-\sqrt{6} \leq k \leq 2+\sqrt{6}$,

所以 $\frac{y+1}{x+1}$ 的最大值为 $2+\sqrt{6}$, 所以 B 正确;

对于 C 中, 由 $|x-y+3|$ 表示圆上任意一点到直线 $x-y+3=0$ 的距离的 $\sqrt{2}$ 倍,

圆心到直线的距离 $d = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 所以其最小值为 $\sqrt{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 4-\sqrt{6}$, 所以 C 错误;

对于 D 中, 因为点 $(0, \sqrt{2})$ 满足圆 C 的方程, 即点 $(0, \sqrt{2})$ 在圆 C 上,

则点 C 与圆心连线的斜率为 $k_1 = -\sqrt{2}$,

根据圆的性质, 可得过点 $(0, \sqrt{2})$ 作圆 C 的切线的斜率为 $k = -\frac{1}{k_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以切线方程为 $y-\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-0)$, 即 $x-\sqrt{2}y+2=0$, 所以 D 正确. 故选: BD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知圆台的高为 4, 上底面半径为 2, 下底面半径为 5, 则该圆台的体积为_____.

解: 因为圆台的高 $h=4$, 上底面半径 $r=2$, 下底面半径 $R=5$,

所以圆台的体积 $V = \frac{1}{3}(\pi r^2 + \pi R^2 + \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi R^2})h$

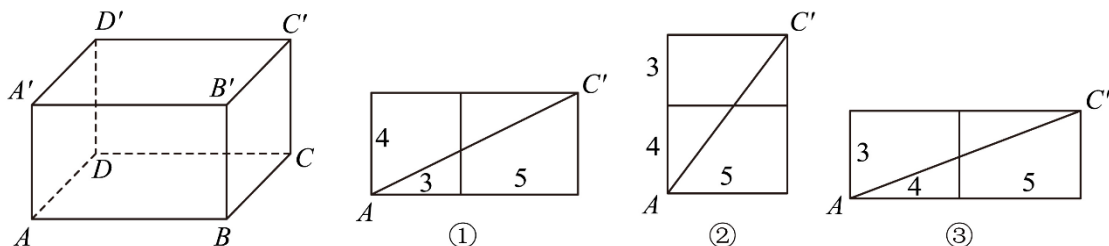
$$= \frac{1}{3}(\pi \times 2^2 + \pi \times 5^2 + \sqrt{\pi \times 2^2 \times \pi \times 5^2}) \times 4 = 52\pi$$

13. 长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=4, BC=3, BB'=5$, 一只蚂蚁从点 A 出发沿表面爬行到点 C' , 蚂蚁爬行的最短路线的长为_____.

【答案】 $\sqrt{74}$

【解析】将长方体侧面展开有三种方式如下图：

AC' 的长有以下三种可能：



第①种方式： $\sqrt{4^2 + (3+5)^2} = \sqrt{80}$ ；

第②方式： $\sqrt{5^2 + (3+4)^2} = \sqrt{74}$ ；

第③种方式： $\sqrt{3^2 + (4+5)^2} = \sqrt{90}$ 。

所以蚂蚁爬行的最短路线的长为 $\sqrt{74}$ 。

14. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ ，直线 $l: (2m+1)x + (m-1)y - m + 4 = 0$ ，当圆 C 被直线 l 截得的弦长最短时，直线 l 的方程为_____。

【答案】 $2x - y + 5 = 0$

【解析】由题意，直线 l 的方程化为 $(2x + y - 1)m + x - y + 4 = 0$ ，

$$\text{由} \begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = -1, \\ y = 3, \end{cases}$$

\therefore 直线 l 过定点 $M(-1, 3)$ ，显然点 M 在圆 C 内，

要使直线 l 被圆 C 截得弦长最短，只需 $M(-1, 3)$ 与圆心 $C(1, 2)$ 的连线垂直于直线 l ，

$$\therefore -\frac{2m+1}{m-1} \cdot \frac{2-3}{1-(-1)} = -1, \text{ 解得 } m = \frac{1}{4},$$

代入到直线 l 的方程并化简得 $2x - y + 5 = 0$ 。

故答案为： $2x - y + 5 = 0$ 。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(2, 3)$ ， $B(1, 2)$ ， $C(4, -4)$ 。

(1) 求 BC 边上的高所在直线 l_1 的方程；

(2) 若直线 l_2 过点 C ，且点 A ， B 到直线 l_2 的距离相等，求直线 l_2 的方程。

【答案】 (1) $x - 2y + 4 = 0$ ； (2) $x - y - 8 = 0$ 或 $13x + 5y - 32 = 0$

【解析】 (1) 因为 $k_{BC} = \frac{-4-2}{4-1} = \frac{-6}{3} = -2$ ，所以 BC 边上的高所在直线 l_1 的斜率为 $k = \frac{1}{2}$ ，

所以 BC 边上的高所在直线 l_1 的方程 $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$ ，即 $x - 2y + 4 = 0$ 。

(2) 因为点 A, B 到直线 l_2 的距离相等, 所以直线 l_2 与 AB 平行或通过 AB 的中点,

①当直线 l_2 与 AB 平行,

因为 $k_{AB} = \frac{3-2}{2-1} = 1 = k_{l_2}$, 且 l_2 过点 C ,

所以 l_2 方程为 $y+4=x-4$, 即 $x-y-8=0$.

②当直线 l_2 通过 AB 的中点 $D(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$,

所以 $k_{CD} = \frac{-4-\frac{5}{2}}{4-\frac{3}{2}} = -\frac{13}{5}$,

所以 l_2 的方程为 $y+4 = -\frac{13}{5}(x-4)$, 即 $13x+5y-32=0$.

综上: 直线 l_2 的方程为 $x-y-8=0$ 或 $13x+5y-32=0$.

16. 已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 4, 在 y 轴上截得线段长为 $4\sqrt{3}$.

(1) 求圆心 P 的轨迹方程;

(2) 若 P 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 求圆 P 的标准方程.

【答案】(1) $y^2 - x^2 = 8$; (2) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 13$ 或 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$

【解析】(1) 设 $P(x, y)$, 圆 P 的半径为 r ,

因为圆 P 在 x 轴上截得的线段长为 4, 点 P 到 x 轴的距离为 $|y|$,

所以有 $r^2 = |y|^2 + 2^2$, 即 $r^2 = y^2 + 4$, 同理有 $r^2 = x^2 + 12$,

即 $y^2 + 4 = x^2 + 12$, 即 $y^2 - x^2 = 8$

故 P 点的轨迹方程为 $y^2 - x^2 = 8$.

(2) 设 $P(x_0, y_0)$, 由已知得 $\frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

所以 $|x_0 - y_0| = 2$. 又 $P(x_0, y_0)$ 点在双曲线 $y^2 - x^2 = 8$ 上,

所以 $\begin{cases} |x_0 - y_0| = 2 \\ y_0^2 - x_0^2 = 8 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 3 \end{cases}$

此时圆的半径 $r^2 = x_0^2 + 12 = 1 + 12 = 13$,

故圆 P 的方程为 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 13$ 或 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$.

17. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$.

(1) 过点 $P(2,1)$ 向圆 O 引切线, 求切线 l 的方程;

(2) 记圆 O 与 x 、 y 轴的正半轴分别交于 A 、 B 两点, 动点 Q 满足 $QA = \sqrt{2}QB$, 问: 动点 Q 的轨迹与圆 O 是否有两个公共点? 若有, 求出公共弦长; 若没有, 说明理由.

【答案】(1) $x=2$ 或 $3x+4y-10=0$.; (2) 有两个公共点, $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

【解析】(1) 由圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 可得圆心 $O(0,0)$, 半径为 $r=2$,

若切线 l 斜率不存在, 则方程为 $x=2$ 与圆 O 相切, 所以 $x=2$ 符合题意;

若斜率存在, 设方程为 $y-1=k(x-2)$, 即 $kx-y+1-2k=0$,

则圆心 $O(0,0)$ 到切线的距离 $d = \frac{|1-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$, 解得: $k = -\frac{3}{4}$,

切线方程为 $y-1 = -\frac{3}{4} \times (x-2)$ 即 $3x+4y-10=0$,

综上所述: 切线方程为 $x=2$ 或 $3x+4y-10=0$.

(2) 因为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 所以 $A(2,0)$, $B(0,2)$,

设 $Q(x,y)$, 由 $QA = \sqrt{2}QB$ 可得: $(x-2)^2 + y^2 = 2[x^2 + (y-2)^2]$,

化简得: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$, 即 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 16$,

所以动点 Q 的轨迹是以 $E(-2,4)$ 为圆心, $R=4$ 为半径的圆 E ,

所以圆心距 $OE = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

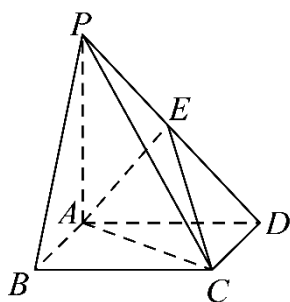
因为 $4-2 < OE < 2+4$, 所以两圆有两个公共点,

由两圆方程相减得公共弦所在直线方程为 $x-2y+2=0$,

圆心 $O(0,0)$ 到直线 $x-2y+2=0$ 的距离 $d = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

所以公共弦长为 $2\sqrt{4 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = AD = 2$, 点 E 为线段 PD 的中点.



(1) 求证: $PB \parallel$ 平面 AEC ;

(2) 求证: $AE \perp$ 平面 PCD ;

(3) 求三棱锥 $A-PCE$ 的体积.

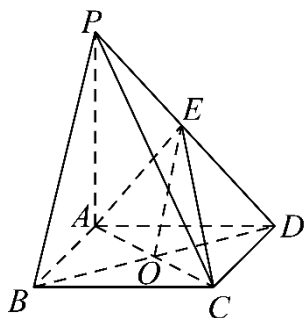
解: (1) 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 EO ,

由底面 $ABCD$ 是正方形, 故 O 为 BD 中点,

又点 E 为线段 PD 的中点, 故 $OE \parallel PB$,

又 $OE \subset$ 平面 AEC , $PB \not\subset$ 平面 AEC ,

故 $PB \parallel$ 平面 AEC ;



(2) 由点 E 为线段 PD 的中点, $PA = AD$, 故 $AE \perp PD$,

由 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 故 $PA \perp CD$,

又底面 $ABCD$ 是正方形, 故 $AD \perp CD$,

又 AD 、 $PA \subset$ 平面 PAD , $AD \cap PA = A$,

故 $CD \perp$ 平面 PAD , 又 $AE \subset$ 平面 PAD ,

故 $CD \perp AE$, 又 CD 、 $PD \subset$ 平面 PCD , $CD \cap PD = D$,

故 $AE \perp$ 平面 PCD ;

(3) 由点 E 为线段 PD 的中点, 故点 P 与点 D 到平面 AEC 距离相等,

$$\text{故 } V_{A-PCE} = V_{P-ACE} = V_{D-ACE} = \frac{1}{2} V_{P-ACD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{2}{3}.$$

19. 设直线 l 的方程为 $(a+1)x + y - 5 - 2a = 0 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 求证: 不论 a 为何值, 直线 l 必过一定点 P ;

(2) 若直线 l 分别与 x 轴正半轴, y 轴正半轴交于点 $A(x_A, 0)$, $B(0, y_B)$, 当 $\triangle AOB$ 面积最小时, 求此时的直线

方程;

(3)当直线 l 在两坐标轴上的截距均为正整数且 a 也为正整数时, 求直线 l 的方程.

【答案】(1)证明见解析; (2) $3x+2y-12=0$; (3) $3x+y-9=0$.

【解析】(1) 由 $(a+1)x+y-5-2a=0$ 得 $a(x-2)+x+y-5=0$, 则 $\begin{cases} x-2=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$,

\therefore 不论 a 为何值, 直线 l 必过一定点 $P(2,3)$;

(2) 由 $(a+1)x+y-5-2a=0$,

当 $x=0$ 时, $y_B=5+2a$, 当 $y=0$ 时, $x_A=\frac{5+2a}{a+1}$,

又由 $\begin{cases} y_B=5+2a>0 \\ x_A=\frac{5+2a}{a+1}>0 \end{cases}$, 得 $a>-1$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot (5+2a) \cdot \frac{5+2a}{a+1} = \frac{1}{2} \left[4(a+1) + \frac{9}{a+1} + 12 \right] \geq \frac{1}{2} \left[2\sqrt{4(a+1) \cdot \frac{9}{a+1}} + 12 \right] = 12,$$

当且仅当 $4(a+1) = \frac{9}{a+1}$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 取等号.

$\therefore A(4,0)$, $B(0,6)$,

\therefore 直线方程为 $3x+2y-12=0$.

(3) 直线 l 在两坐标轴上的截距均为正整数, 即 $5+2a$, $\frac{5+2a}{a+1}$ 均为正整数, 而 a 也为正整数,

$$\text{Q } \frac{5+2a}{a+1} = 2 + \frac{3}{a+1}, \therefore a=2,$$

\therefore 直线 l 的方程为 $3x+y-9=0$.