

国庆数学试卷3 参考答案

1. A 【详解】由圆 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ 可得标准方程为 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$,

即圆心为 $(-1, 3)$, 因为圆关于直线 $ax - by + 3 = 0$ 对称, 则该直线经过圆心 $(-1, 3)$,

即 $-a - 3b + 3 = 0$, 整理得 $\frac{1}{3}a + b = 1$ ($a > 0, b > 0$),

$$\text{则 } \frac{1}{a} + \frac{3}{b} = \left(\frac{1}{3}a + b\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{3}{b}\right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3a}{b} + \frac{3b}{a} + 9\right) \geq \frac{1}{3} \left(10 + 2\sqrt{\frac{3a}{b} \cdot \frac{3b}{a}}\right) = \frac{16}{3},$$

当且仅当 $\frac{3b}{a} = \frac{3a}{b}$, 即 $a = b = \frac{3}{4}$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{1}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值是 $\frac{16}{3}$. 故选: A.

2. B 【详解】若方程 $x^2 + y^2 + ax + 2ay + 2a^2 + a - 1 = 0$ 表示圆,

$$\text{则 } a^2 + (2a)^2 - 4(2a^2 + a - 1) = -3a^2 - 4a + 4 > 0 \Rightarrow (3a - 2)(a + 2) < 0,$$

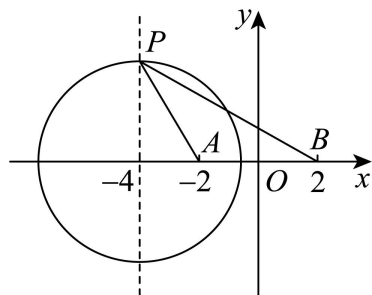
解得 $-2 < a < \frac{2}{3}$, 又 $a \in \left\{-2, -1, 0, \frac{3}{4}, 1\right\}$, 所以 $a = -1$ 或 $a = 0$,

即方程 $x^2 + y^2 + ax + 2ay + 2a^2 + a - 1 = 0$ 表示的圆的个数为 2. 故选: B

3. C

【详解】解: 以经过 A, B 的直线为 x 轴, 建立直角坐标系,

如图所示:



则 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 设 $P(x, y)$,

$$\because \frac{|PA|}{|PB|} = \sqrt{3}, \therefore \frac{(x+2)^2 + y^2}{(x-2)^2 + y^2} = 3,$$

整理得: $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$, 即 $(x-4)^2 + y^2 = 12$,

当点 P 到 AB (x 轴) 的距离最大, 即最大值为 $2\sqrt{3}$ 时, 三角形 PAB 的面积最大,

所以三角形面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

故选: C.

4. C

【详解】 $\because l_1 // l_2, \therefore a(a+2) - (-1) \times a = 0$, 解得: $a = 0$ 或 $a = -3$.

当 $a = -3$ 时, 直线 $l_1: 3x + y + 1 = 0$, 直线 $l_2: 3x + y + 1 = 0$, 两直线重合;

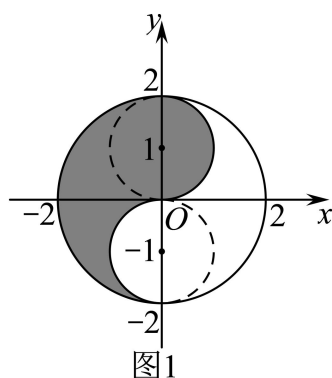
当 $a = 0$ 时, 经检验, 满足题意;

综上, $a = 0$.

故选: C

5. A

【详解】如图1所示, 大圆的半径为2, 小圆的半径为1,



\therefore 大圆的面积为 4π , 小圆的面积为 π .

对于①, 当 $a = 0$ 时, 直线 l 的方程为 $y = 0$,

此时直线 l 将黑色阴影区域的面积分为两部分,

其中 $S_1 = \frac{1}{4} \times 4\pi + \frac{1}{2} \times \pi = \frac{3\pi}{2}$, $S_2 = \frac{1}{4} \times 4\pi - \frac{1}{2} \times \pi = \frac{\pi}{2}$,

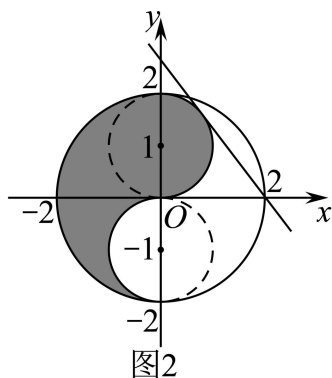
$\therefore S_1 : S_2 = 3 : 1$, ①正确;

对于②, 由题意知: 黑色阴影区域在第一象限的边界方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 1 (x > 0)$,

当 $a = -\frac{4}{3}$ 时, 直线 l 的方程为 $y = -\frac{4}{3}(x-2)$, 即 $4x + 3y - 8 = 0$,

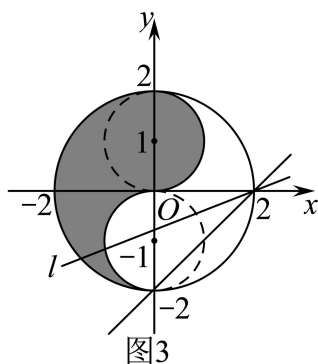
\therefore 小圆圆心 $(0, 1)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{|3-8|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 1$,

\therefore 直线 l 与该半圆弧相切, 如图2所示,



\therefore 直线 l 与黑色阴影区域只有一个公共点，②正确；

对于③，当 $a \in [0, 1)$ 时，如图3所示，



易得直线 $l: y = a(x - 2)$ 恒过定点 $(2, 0)$ ，

当 $a = 1$ 时，直线 $l: y = x - 2$ 与黑色阴影区域的边界曲线有1个公共点，③错误。

综上所述：①②正确。

故选：A。

6. C

【详解】 $2(3x - 4y - 4) = 6x - 8y - 8 = 0$ ，显然与另一条直线平行，则所求距离为

$$\frac{|-8 - (-3)|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{1}{2}.$$

故选：C。

7. A

【详解】 设 $M(x, y)$ ， $Q(x_0, y_0)$ ，

由 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$ 得 M 是线段 PQ 中点， $\therefore \begin{cases} x_0 = 2x - 4 \\ y_0 = 2y - 3 \end{cases}$ ，

又 Q 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上, $(2x-4)^2 + (2y-3)^2 = 4$, 即 $(x-2)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = 1$,

$\therefore M$ 点轨迹是半径为 1 的圆, 面积为 $S = \pi$,

故选: A.

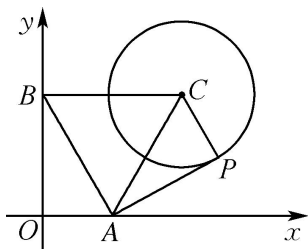
8. B

【详解】圆 $C: (x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$ 的圆心为 $(2, \sqrt{3})$, 半径为 1, 点 $A(1, 0), B(0, \sqrt{3})$,

如图所示: 当 $\angle PAB$ 最大时, PA 与圆 C 相切, 连接 CP, AC , 可知 $PC \perp PA$,

$$|AC| = \sqrt{(2-1)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = 2, |AB| = |BC| = 2,$$

故 $\angle CAP = 30^\circ, \angle BAC = 60^\circ$, 所以 $\angle PAB = 90^\circ, \sin \angle PAB = 1$.



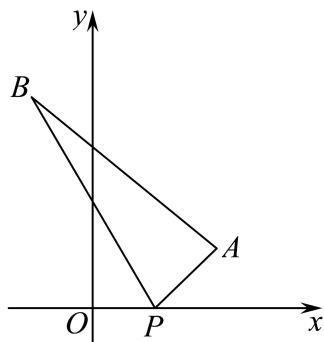
故选: B

9. AC

【分析】A 选项, $k_{PA} = \frac{1-0}{2-1} = 1$, 所以直线 PA 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$,

$k_{PB} = \frac{2\sqrt{3}-0}{-1-1} = -\sqrt{3}$, 所以直线 PB 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$,

所以直线 l 的倾斜角范围为 $[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}]$, A 选项正确.



B 选项, 由 $a \times (-a) = (-1) \times 1, a^2 = 1$ 解得 $a = \pm 1$,

当 $a = 1$ 时, 两直线为 $x - y + 1 = 0, x - y - 2 = 0$, 两直线平行;

当 $a = -1$ 时, 两直线为 $-x - y + 1 = 0, x + y - 2 = 0$,

即 $x + y - 1 = 0, x + y - 2 = 0$, 两直线平行,

所以“ $a=1$ ”是“直线 $ax-y+1=0$ 与直线 $x-ay-2=0$ 互相平行”的充分不必要条件，
所以 B 选项错误.

C 选项， $C_1: x^2+y^2+2x=0$ ，即 $(x+1)^2+y^2=1$ ，是圆心为 $C_1(-1,0)$ ，半径 $r_1=1$ ；

$C_2: x^2+y^2-4x-8y+m=0$ ，即 $(x-2)^2+(y-4)^2=20-m$ ，

要表示圆，则 $20-m>0, m<20$ ，此时圆心为 $C_2(2,4)$ ，半径为 $\sqrt{20-m}$ ，

两圆有四条公切线，所以两圆外离，

所以 $|C_1C_2|>1+\sqrt{20-m}, 5>1+\sqrt{20-m}$ ，解得 $4<m<20$ ，C 选项正确.

D 选项，圆 $x^2+y^2=2$ 的圆心为 $(0,0)$ ，半径为 $\sqrt{2}$ ，

圆心到直线 $x-y+1=0$ 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以圆 $x^2+y^2=2$ 上有且仅有 3 个点到直线 $l: x-y+1=0$ 的距离都等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 D 选项错误.

故选：AC

10. ABD

【详解】因为 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$ ，

所以圆心 $C(1,2)$ ，又 $P(0,1)$ ，则 $|CP|=\sqrt{(0-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$ ，

圆 C 的半径 $r=2, |CB|=r=2$ ，

又 $(0-1)^2+(1-2)^2=2<4$ ，故点 P 在圆内，

所以当 $CP \perp l$ 时，线段 AB 的长最小，

此时 $|AB|=2\sqrt{|CB|^2-|CP|^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$ ，A 正确；

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r^2\sin\angle ACB$ ，当 $AC \perp BC$ 时，面积最大为 2，B 正确；

记线段 AB 的中点为 M ，则 $CM \perp AB$ ，

$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|2\overrightarrow{CM}|\leq|2\overrightarrow{CP}|=2\sqrt{2}$ ，C 错误；

若圆 C 上有且仅有三个点到直线 l 的距离为 1，

则圆心 C 到直线 AB 的距离为 1，

所以 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - 1} = 2\sqrt{3}$, D 正确.

故选: ABD.

11. ABD

【详解】A 选项, 过任意两点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 当 $x_1 = x_2$ 时,

直线方程不能表示 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, 所以 A 选项错误.

B 选项, 直线 $y = x$ 过点 $(1, 1)$, 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等, 所以 B 选项错误.

C 选项, 直线倾斜角 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$, $k = \tan \alpha$, 则根据正切函数的性质知 k 的取值范围是

$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$, 故 C 正确;

D 选项, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 直线的斜率不存在, 所以 D 选项错误.

故选: ABD

12. $2\sqrt{14}$

【详解】把直线 $l: (a-b)x + (b-2a)y - a = 0$ 化为 $a(x-2y-1) + b(-x+y) = 0$,

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}, \text{恒过定点 } (-1, -1),$$

当圆 C 被直线 l 截得的弦长的最小值时,

圆心 $(0, 0)$ 到定点 $(-1, -1)$ 的距离为 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

圆心到直线 $l: (a-b)x + (b-2a)y - a = 0$ 距离最大值时即为 $\sqrt{2}$,

此时直线弦长为最小值 $2\sqrt{16-2} = 2\sqrt{14}$.

故答案为: $2\sqrt{14}$.

13. 0 或 30/30 或 0

【详解】 \because 两条平行直线 $L_1: x+2y+3=0$, $L_2: 3x+by+c=0$,

则 $3 \times 2 - 1 \times b = 0$, 解得 $b = 6$;

所以直线 $L_1: x+2y+3=0$, 即 $3x+6y+9=0$, $L_2: 3x+6y+c=0$;

则两平行线间的距离为 $\frac{|c-9|}{\sqrt{3^2+6^2}} = \sqrt{5}$,

解得 $c = -6$ 或 24 .

故答案为: 0 或 30.

14. $10 - 4\sqrt{5}$.

【详解】 $l_1: mx - y - 4m + 2 = 0$ 变形得到 $l_1: m(x - 4) + (-y + 2) = 0$, 令 $\begin{cases} x - 4 = 0 \\ -y + 2 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$,

从而 $M(4, 2)$, $l_2: x + my - 6m - 2 = 0$ 变形得到 $l_2: m(y - 6) + (x - 2) = 0$, 令 $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 6 = 0 \end{cases}$, 解得

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$, 从而 $N(2, 6)$, 由 $PM \perp PN$, 由勾股定理得

$|PM|^2 + |PN|^2 = |MN|^2 = (4 - 2)^2 + (2 - 6)^2 = 20$, 点 P 的轨迹为以 MN 为直径的圆, 其中线段

MN 的中点坐标为 $Q(3, 4)$, 半径为 $\frac{|MN|}{2} = \sqrt{5}$, P 点轨迹方程为 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$, 圆

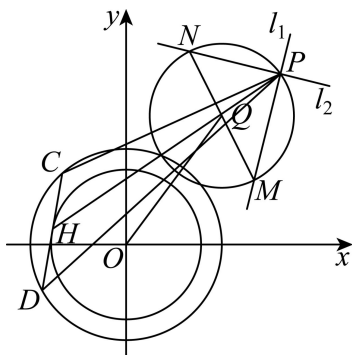
$x^2 + y^2 = 9$ 的圆心为 $O(0, 0)$, 半径为 3, 设 CD 的中点为 H , 由垂径定理得

$|OH| = \sqrt{9 - \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$, 故 H 点的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 5$, 因为 P 点轨迹方程为

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$, 则 PH 的最小值为圆心距减去两半径, 即 $\sqrt{3^2 + 4^2} - \sqrt{5} - \sqrt{5} = 5 - 2\sqrt{5}$,

其中 $|\overline{PC} + \overline{PD}| = 2|\overline{PH}|$, 所以 $|\overline{PC} + \overline{PD}|$ 的最小值为 $10 - 4\sqrt{5}$.

故答案为: $10 - 4\sqrt{5}$.



15. (1) $[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}]$; (2) $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$.

【详解】

解: (1) 因为直线 OA 的斜率为 $k_{OA} = 1$, 倾斜角 $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, 直线 OB 的斜率为 $k_{OB} = -\sqrt{3}$,

倾斜角 $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$, 所以直线 OP 斜率的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$, 倾斜角的取值范围是 $[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}]$.

(2) 同(1), 所以直线 OP 斜率的取值范围是 $[-\sqrt{3}, 1]$, 倾斜角的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$.

16. (1) $k = 0$ 或 $k = \frac{4}{3}$

(2) 4

【详解】(1) 由题意得, 直线 $l: kx - y + 1 - 2k = 0$, $O(0,0)$, 半径 $r = 1$,

$$\therefore O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|1-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1,$$

$$\text{解得 } k = 0 \text{ 或 } k = \frac{4}{3}.$$

(2) 由题意得, $k < 0$,

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } A\left(2 - \frac{1}{k}, 0\right); \text{ 令 } x = 0, \text{ 得 } B(0, 1-2k),$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{k}\right)(1-2k) = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{k} - 4k\right) \geq \frac{1}{2} \left(4 + 2\sqrt{\left(-\frac{1}{k}\right)(-4k)}\right) = 4,$$

$$\text{当且仅当 } -\frac{1}{k} = -4k, \text{ 即 } k = -\frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立,}$$

即 $\triangle OAB$ 面积的最小值为 4.

17. (1) $k \geq \frac{1}{2}$

(2) $y = -x + 3$ 或 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

【详解】(1) 由题意可知直线 $l: y = kx - 2k + 1 (k \in \mathbb{R})$,

$$y = k(x-2) + 1 \text{ 易知直线 } l \text{ 过定点 } (2, 1),$$

$$\text{当直线 } l \text{ 过原点时, 可得 } k = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } k \geq \frac{1}{2} \text{ 时, 直线 } l \text{ 不经过第二象限.}$$

(2) 由题意可知 $k < 0$,

$$\because \text{直线 } l: y = kx - 2k + 1 \text{ 与 } x \text{ 轴、} y \text{ 轴正半轴的交点分别是 } A\left(2 - \frac{1}{k}, 0\right), B(0, 1-2k),$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \left|2 - \frac{1}{k}\right| \times |1-2k| = \frac{1}{2} \times \frac{(2k-1)^2}{|k|},$$

圆 F 的方程为 $(x - \frac{t}{2})^2 + (y - \frac{t-4}{2})^2 = (\frac{t}{2})^2 + (\frac{t-4}{2})^2$, 即 $x^2 + y^2 - tx - (t-4)y = 0$,

又因为 M, N 在曲线 $E: x^2 + y^2 = 4$ 上, 由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - tx - (t-4)y = 0 \end{cases}$, 得 $tx + (t-4)y - 4 = 0$,

因此直线 MN 的方程为 $tx + (t-4)y - 4 = 0$, 即 $t(x+y) - 4(y+1) = 0$ 过定点 $(1, -1)$,

所以直线 MN 是过定点 $(1, -1)$.

19. (1) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$

(2) $11\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$

【详解】(1) 由题意, 设 $Q(x, y)$, 由 $\overrightarrow{PQ} = (3, -4)$, 得 $P(x-3, y+4)$,

P 为圆 $O: x^2 + y^2 = 9$ 上的动点, 所以 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$,

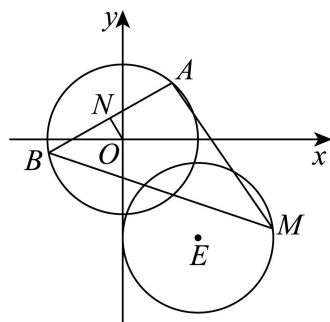
所以 Q 点的轨迹方程为: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$.

即曲线 E 的方程为: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$.

(2) 将 l 的方程整理为 $(x + \sqrt{3}y - 1)m + \sqrt{3}x - 2y + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$,

令 $\begin{cases} x + \sqrt{3}y - 1 = 0, \\ \sqrt{3}x - 2y + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ 所以 l 过定点 $N\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

如图:



当 $AB \perp ON$ 时, $|AB|$ 取得最小值, 此时 $k_{ON} = -\sqrt{3}$, 所以 $k_{AB} = -\frac{m+\sqrt{3}}{\sqrt{3}m-2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $m = -\frac{\sqrt{3}}{6}$,

直线 AB 的方程为 $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$,

$$|ON| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad |AB| = 2\sqrt{9-1} = 4\sqrt{2}.$$

由 (1) 可知, 曲线 E 是圆心为 $E(3, -4)$, 半径为 3 的圆, 点 E 到 l 的距离为

$$\frac{|3+4\sqrt{3}+2|}{2}=\frac{5}{2}+2\sqrt{3}, \text{ 所以点 } M \text{ 到 } l \text{ 的距离 } d \leq \frac{5}{2}+2\sqrt{3}+3=\frac{11}{2}+2\sqrt{3},$$

$$\text{故 } \triangle MAB \text{ 面积的最大值为 } \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \left(\frac{11}{2}+2\sqrt{3}\right) = 11\sqrt{2} + 4\sqrt{6}.$$