

# 正道年级国庆数学试卷 3

学校:\_\_\_\_\_姓名:\_\_\_\_\_班级:\_\_\_\_\_考号:\_\_\_\_\_

**一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. 圆  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$  关于直线  $ax - by + 3 = 0$  ( $a > 0, b > 0$ ) 对称, 则  $\frac{1}{a} + \frac{3}{b}$  的最小值是 ( ).

- A.  $\frac{16}{3}$                       B.  $\frac{20}{3}$                       C. 4                      D.  $2\sqrt{6}$

2. 若  $a \in \left\{-2, -1, 0, \frac{3}{4}, 1\right\}$ , 则方程  $x^2 + y^2 + ax + 2ay + 2a^2 + a - 1 = 0$  表示的圆的个数为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

3. 若平面内两定点 A、B 的距离为 4, 动点 P 满足  $\frac{|PA|}{|PB|} = \sqrt{3}$ , 若点 P 不在直线 AB 上, 则三角形 PAB 的面积最大值为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $2\sqrt{3}$                       C.  $4\sqrt{3}$                       D.  $8\sqrt{3}$

4. 已知直线  $l_1: ax - y - 1 = 0$ ,  $l_2: ax + (a + 2)y - 1 = 0$ . 若  $l_1 \parallel l_2$ , 则实数  $a =$  ( )

- A. 0 或 -3                      B. -3                      C. 0                      D. -1 与 0

5. 太极图的形状如中心对称的阴阳两鱼互抱在一起, 因而也被称为“阴阳鱼太极图”. 如图是放置在平面直角坐标系中简略的“阴阳鱼太极图”, 其外边界是一个半径为 2 的圆, 其中黑色阴影区域在 y 轴右侧部分的边界为一个半圆, 已知直线  $l: y = a(x - 2)$ . 给出以下命题:

①当  $a = 0$  时, 若直线  $l$  截黑色阴影区域所得两部分的面积分别记为

$S_1, S_2$  ( $S_1 \geq S_2$ ), 则  $S_1 : S_2 = 3 : 1$ ;

②当  $a = -\frac{4}{3}$  时, 直线  $l$  与黑色阴影区域有 1 个公共点;

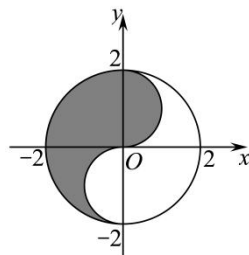
③当  $a \in [0, 1]$  时, 直线  $l$  与黑色阴影区域的边界曲线有 2 个公共点.

其中所有正确命题的序号是 ( )

- A. ①②                      B. ①③                      C. ②③                      D. ①②③

6. 直线  $3x - 4y - 4 = 0$  与直线  $6x - 8y - 3 = 0$  之间的距离为 ( )

- A.  $\frac{1}{5}$                       B.  $\frac{2}{5}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D. 1



7. 已知点  $P(4, 3)$ , 点  $Q$  在  $x^2 + y^2 = 4$  的圆周上运动, 点  $M$  满足  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$ , 则点  $M$  的运动轨迹围成图形的面积为 ( )

- A.  $\pi$                       B.  $2\pi$                       C.  $3\pi$                       D.  $4\pi$

8. 已知点  $P$  是圆  $C: (x - 2)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 1$  上的动点, 点  $A(1, 0), B(0, \sqrt{3})$ , 则当  $\angle PAB$  最大时,  $\sin \angle PAB =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B. 1                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$                       D.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

**二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。**

9. 下列说法正确的是 ( )

A. 已知点  $A(2, 1), B(-1, 2\sqrt{3})$ , 若过  $P(1, 0)$  的直线  $l$  与线段  $AB$  相交, 则直线  $l$  的倾斜角范围为  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$

B. “ $a = 1$ ”是“直线  $ax - y + 1 = 0$  与直线  $x - ay - 2 = 0$  互相平行”的充要条件

C. 曲线  $C_1: x^2 + y^2 + 2x = 0$  与  $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 8y + m = 0$  恰有四条公切线, 则实数  $m$  的取值范围为  $4 < m < 20$

D. 圆  $x^2 + y^2 = 2$  上有且仅有 2 个点到直线  $l: x - y + 1 = 0$  的距离都等于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 圆  $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ , 直线  $l$  过点  $P(0, 1)$  且与圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 则下列结论正确的是 ( )

A.  $|AB|$  的最小值为  $2\sqrt{2}$

B.  $\triangle ABC$  面积的最大值为 2

C.  $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$  的最大值为 4

D. 若圆  $C$  上有且仅有三个点到直线  $l$  的距离为 1, 则  $|AB| = 2\sqrt{3}$

11. 下列说法错误的是 ( )

A. 过任意两点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  的直线方程为  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

B. 经过点  $(1, 1)$  且在  $x$  轴和  $y$  轴上截距都相等的直线方程为  $x + y - 2 = 0$

C. 若直线倾斜角  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$ , 则斜率  $k$  的取值范围是  $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$

D. 若直线的倾斜角为  $\alpha$ , 则直线的斜率为  $\tan \alpha$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知圆  $C:x^2+y^2=16$ ，直线  $l:(a-b)x+(b-2a)y-a=0$ （ $a$ 、 $b$  不同时为 0），当  $a$ 、 $b$  变化时，圆  $C$  被直线  $l$  截得的弦长的最小值为\_\_\_\_\_.

13. 已知两条平行直线  $L_1: x+2y+3=0$ ， $L_2: 3x+by+c=0$  间的距离为  $\sqrt{5}$ ，则  $b+c$ =\_\_\_\_\_.

14. 设  $m \in \mathbf{R}$ ，直线  $l_1: y=mx-4m+2$  与直线  $l_2: x+my-6m-2=0$  相交于点  $P$ ，线段  $CD$  是圆  $x^2+y^2=9$  的一条动弦，且  $|CD|=4$ ， $|\overline{PC}+\overline{PD}|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （1）已知点  $A(1, 1)$ ，点  $B(-1, \sqrt{3})$ ， $P$  是线段  $AB$ （包含端点）上的任意一点， $O$  为坐标原点，求直线  $OP$  的斜率和倾斜角的取值范围；

（2）已知点  $A(1, 1)$ ， $B(1, -\sqrt{3})$ ， $P$  是线段  $AB$ （包含端点）上的任意一点， $O$  为坐标原点，求直线  $OP$  的斜率和倾斜角的取值范围.

16. 已知直线  $l: y=k(x-2)+1$  与圆  $O: x^2+y^2=1$ .

- (1)当直线  $l$  与圆  $O$  相切时，求实数  $k$  的值；
- (2)若直线  $l$  与  $x$ ， $y$  轴的正半轴分别交于  $A$ ， $B$  两点，求  $\triangle OAB$  面积的最小值.

17. 已知直线  $l: y=kx-2k+1(k \in \mathbf{R})$ .

- (1)若直线  $l$  不经过第二象限，求  $k$  的取值范围.
- (2)若直线  $l$  与  $x$  轴、 $y$  轴正半轴分别交于  $A$ 、 $B$  两点，当  $\triangle AOB$  的面积为  $\frac{9}{2}$  时（ $O$  为坐标原点），求此时相应的直线  $l$  的方程.

18. 在平面直角坐标系中，已知两个定点  $A(0,4),B(0,1)$ ，动点  $P$  满足  $|PA|=2|PB|$ ，设动点  $P$  的轨迹为曲线  $E$ .

- (1)求曲线  $E$  的方程；
- (2)若直线  $l: y=kx-4$  与曲线  $E$  交于不同的两点  $C,D$ ，且  $\angle OCD=30^\circ$ （ $O$  为坐标原点），求直线  $l$  的斜率；
- (3)若点  $Q$  是直线  $l: x-y-4=0$  上的动点，过  $Q$  作曲线  $E$  的两条切线  $QM, QN$ ，切点为  $M, N$ ，探究：直线  $MN$  是否过定点.

19. 已知  $P$  是圆  $O: x^2+y^2=9$  上的动点，点  $Q$  满足  $\overline{PQ}=(3,-4)$ ，记  $Q$  的轨迹为曲线  $E$ .

- (1)求曲线  $E$  的方程.
- (2)直线  $l:(m+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}m-2)y+\frac{3\sqrt{3}}{2}-m=0$  与圆  $O$  交于  $A,B$  两点， $M$  是曲线  $E$  上一点.当  $|AB|$  取得最小值时，求  $\triangle MAB$  面积的最大值.

